Math. P.
495

Math. P. 495

Beyträge zur Meßkunst

auf der Oberfläche der Erde,

wenn man sie als eine Elliptoide betrachtet, deren Verhältniß der Achsen 230 : 231;

sammt einem

Anhange

über

die Quadratur der Oberfläche einer Elliptoide

auf Logarithmen und Sinus reduciert.

von

Karl Scherffer,

Priester, der Philosophie Doctor, und öffentl. ordentl. Lehrer der höhern Mathematik an der Universität zu Wien.

Wien,

gedruckt bey Johann Thomas Edlen von Trattnern, kaiserl. königl. Hofbuchdruckern und Buchhändlern.

1783.

R

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorbericht.

Ich habe im Jahre 1781. eine Abhandlung über eine Methode auf der Oberfläche einer bey dem Pole zusammen gedrückten Elliptoide Perpendikularhöhen und Längen zu messen *) geschrieben; und diese lege ich zum Grunde der Gegenwärtigen. Denn obschon in die Berechnungsart des kürzesten Bogens, der zwischen zwey gegebenen Punkten auf der Oberfläche einer Elliptoide kann beschrieben werden, aus einer Uibersehung ein Fehler eingeschlichen ist, so ist doch dieser der Theorie nicht im Geringsten nachtheilig, und läßt sich die Berechnung durch ein Paar sphärischer Dreyecke wieder zur Richtigkeit bringen; und dieses ist es eben, von welchem ich meinen Lesern vorhinein Rechenschaft zu geben habe.

In der I. Anmerkung 30. Seite N. 34. wird die Linie C*f* der 16. Figur (IV. Taf.) als eine Ordinate angenommen, welches nur zufälliger Weise in jener Figur geschah, deren ich mich bediente. In der Vorrichtung bleibt die Ellipse G*mn*H hinweg, und man bestimmt allein den Punkt *n*, in welchem die verlängerte Ordinate FN an die verlängerte Elliptoide stößt, wenn man setzt FN $(b \sin. \varrho)$: Fn = b : $\frac{a^2}{b}$, und es wird F$n = \frac{a^2 \sin. \varrho}{b}$. Aus C wird C$n$,

 und

*) Beyträge zur Mathematik 1. Abhandlung.

und nm mit NM parallel gezogen. Die Elliptoiden werden durch einen Plan VnoS geschnitten, der durch den Mittelpunkt C, und nm geht. Man beschreibe auf dem Plane X$\Pi\pi$Y mit einem beliebigen Halbmesser Cα einen Cirkelbogen $\alpha\beta$; einen andern auf dem Plane der Linien CΠ, Cn, nämlich $\alpha\delta$; endlich einen $\delta\varphi$ auf dem Plane des Durchschnitts VnoS. Es ist einleuchtend, daß der Plan πoC sowohl auf XΠY, als auf VnoS senkrecht stehe, indem sowohl πC, als oC auf SV perpendikulär sind; und wenn man sowohl $\alpha\beta$, als $\delta\varphi$ verlängerte, würden die Halbcirkel auf der Linie SV einen gemeinschaftlichen Durchmesser haben, mithin wird auch ein auf dem Platze πoC beschriebener Cirkelbogen $\beta\varepsilon$ sowohl auf $\varphi\delta$, als auf $\alpha\beta$ in ε und β perpendikulär seyn.

Man beschreibe noch auf dem Plane ΠoC den Bogen $\alpha\varepsilon$, so hat man drey sphärische rechtwinklichte Dreyecke, $\gamma\beta\alpha$, $\gamma\varepsilon\delta$, $\varepsilon\beta\alpha$. In dem ersten ist der Winkel $\beta\alpha\gamma$, und die Seite $\alpha\beta$ bekannt; denn jener ist dem CFE = BCY gleich, dieser aber mißt den Winkel $\Pi C\pi$ = MNL, und man findet $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma\alpha$. Der ganze Bogen $\alpha\delta$ ist das Complement der Polhöhe des Punkts N, folglich bekannt, und wenn $\alpha\gamma$ davon abgezogen wird, hat man $\gamma\delta$, wie auch den Winkel $\varepsilon\gamma\delta$, in dem rechtwinklichten Dreyecke $\varepsilon\gamma\delta$, und man sucht $\gamma\varepsilon$, welches zu $\beta\gamma$ hinzugesetzt in dem rechtwinklichten Dreyecke $\alpha\beta\varepsilon$ die Seite $\beta\varepsilon$ giebt; und da auch $\alpha\beta$ gegeben wird, findet man $\alpha\varepsilon$ das Complement der Polhöhe des Punkts O. Man suche ϱ für diesen Punkt, und man hat CK = $\frac{a^2 - b^2}{b} \times \sin.\ \varrho$. Die übrige Berechnungsart bleibt ohne Veränderung.

Da nun die geometrische Sicherheit sowohl der Theorie, als der Berechnungsart außer Zweifel sind; der Anwendung aber auf die Erdmeßkunst nichts mehr im Wege steht, als die beschwerliche Weitläuftigkeit, welche von einer geometrischen Schärfe unzertrennlich ist, so wollte ich in Gegenwart untersuchen, wie weit man von der strengsten Genauigkeit auch bey größeren Ausmessungen auf unserer Erdelliptoide abweichen könne, ohne die Berechnung merklichen Fehlern auszusetzen. Ich nehme aber hier das Verhältniß der Erdachse zu dem Durchmesser des Aequators eben jenes an, welches ich vormals beybehalten habe, nämlich 230 zu 231, indem dieses von jenem, welches Newton angiebt, sehr wenig abweicht, und durch die Uibereinstimmung mit der Theorie der Anziehungskraft einen besondern Vorzug behält.

Gegenwärtige Untersuchung besteht nur in diesem, daß wir erstens einzelne Dreyecke betrachten werden; und da zu ihrer Bestimmung Grundlinie, und Winkel erfordert werden, ist zu untersuchen, ob man sich an die geradlinichte Trigonometrie halten darf, oder an die sphärische? was für eine Behutsamkeit dabey vonnöthen, und welche Gränzen nicht zu überschreiten sind? denn ich nehme in den anzuführenden Beyspielen geflissen so grosse Seiten an, daß dergleichen auch bey grossen Ausmessungen nur gar selten oder gar nicht vorkommen können, damit man aus den Resultaten urtheilen könne, wie weit, und in welchen Fällen man eine genugsame Sicherheit der Berechnung habe.

Zweytens werden wir sehen, wie mehrere Dreyecke mit einander zu verbinden, und was für Verbesserungen anzuwenden sind.

Ich setze auch dieses insgemein zum voraus, daß man die Abweichung einer Linie OM (1. Fig. I. Taf.) von I. Fig. I. Taf.

von dem Meridiane PO des in O sich befindenden Beobachters nach seiner Verticallinie OK bestimmen könne, ohne hier auf eine Verbesserung zu sehen, die etwa der Unterschied des wahren und scheinbaren Azimuths, die Vertiefung der Station M gegen O ꝛc. erfordert; denn dieses ward schon lange bey grösseren Ausmessungen beobachtet, und muß hier als etwas Bekanntes angenommen werden, obwohlen wir auch von diesen Gegenständen in Kürze etwas melden werden.

1. I. Aufgabe. Es werden die Polhöhen der Stationen N, M, und die Differenz der Meridiane gegeben; man sucht die Senne NM. (1. Fig. I. Taf.). 1. Fig. I. Taf.

Auflösung. Man setze $CE : CF = 1 : tang.\, X$; und $1\ tang.\ (X - 45^\circ) = tang.\ \frac{1}{2}\ (180^\circ - C) : tang.\ A$; den Winkel A ziehe man von $\frac{1}{2}\ (180^\circ - C)$ ab, so hat man CFE; dann steht $sin.\ CFE : sin.\ C = CE : EF$.

Man ziehe NL mit FE parallel, so wird $FE = NL$, indem auch NF mit NM parallel ist, und man hat $NL : LM\ (= ME - NF) = 1 : tang.\ MNL$, und $sin.\ MNL : 1 = LM : MN$. W. zu f. w.

2. Beyspiel. Wir wollen annehmen $BCA = 1^\circ$, die Polhöhe $N = 45^\circ$, $M = 45^\circ\ 30'$; so wird für $\varphi = 45^\circ$ der Winkel $\varrho = 44^\circ\ 52'\ 32'', 56$; $l. sin.\, \varrho = -1,8485408$; $l. cos.\, \varrho = -1,8504251$; $NF = b\, sin.\, \varrho = 81,1406666$; $l. CF = 1,9130071 = l.\ a\ cos.\ \varrho$; $CF = 81,847811$.

Für $\varphi' = 45^\circ\ 30'$ wird $\varrho' = 45^\circ 22'\ 32'', 56$; $l.\ sin.\ \varrho' = -1,8523142$; $log.\ cos.\ \varrho' = -1,8466184$. $MF = b\ sin.\ \varrho' = 81,84892$; $l.\ CE = l.\ a\ cos.\ \varrho = 1,9092004$; $CE = 81,13354$. $CF - CE = 0,71427$. $L. (CF - CE) = -1,8538624$. $X = 45^\circ\ 15'\ 4''$. $A = 26^\circ\ 39'$

59″. CFE = 62° 50′ 1″. Log. FE = 0,2018197. ML = 0,70825; Log. ML = — 1,8501866. *Log. tang.* MNL = — 1,6483669, welchem 23° 59′ 21″,85 zustehen. *Log. sin.* MLN = — 1,6091329; *log.* MN = 0,2410537.

Wenn wir annehmen, daß einem Grade des Aequators 58826 Wiener-Klafter zustehen, so findet man daß der Halbmesser so viele Klafter halte, als dem Logarithmus 6,5276919 gebühren; und wenn man von diesem den Logarithmus des Halbmessers 2,0625820 abzieht, so verbleibt ein beständiger Logarithmus 4,4651099, zu welchem man nur den Logarithmus einer Größe (die man in Theilen des Halbmessers hat) hinzu setzen darf, um den Logarithmus derselben Größe in Klaftern zu bekommen. Im gegenwärtigen Beyspiele ist der Logarithmus der Senne MN = 0,2410537, und wenn man sie auf Klafter reducieren will, so wird der Logarithmus = 0,2410537 + 4,4651099 = 4,7061636, welchem 50835,09302 Klafter zukommen.

3. Anmerkung. Aus der gefundenen Größe der Senne NM können wir noch keine Folge herleiten, bis wir den Bogen selbst werden gefunden haben. Itzt aber wollen wir zuvor sehen, um wie viel die Linie 1. Fig. I. Taf. N. 1. NL (2. Fig. I. Taf.), die auf dem Horizontalplane TNO des Beobachters in N bis auf die verlängerte Normale der Station in M gezogen wird, größer sey als die Senne NM.

4. II. Aufgabe. Man sucht die Linie NL auf dem Horizonte des Beobachters in N bis an die Normale in M.

Auflösung. Man nehme in G eine Station von gleicher Polhöhe mit N; verlängere die Normalen N*k*, G*k*, bis sie in *k* die verlängerte Achse PC schnei-

den

den, und suche die Senne GN, den Winkel NkG, die Tangente dieses Winkels NO nach dem Halbmesser Nk, und endlich GO. Weiters suche man die gleichen Tangenten NT, GT, und setze GT : GO = 1 : *tang.* GTO; wie auch *sin.* GTO : 1 = OG : OT. Man ziehe die Tangente Mt, verlängere sie, und lasse aus T darauf einen Perpendikel Tn fallen. Die Polhöhe der Punkte N, G sey φ, jene des M aber φ', so steht wegen Aehnlichkeit der Dreyecke Ttn, tMπ, tM : Mπ (= CE) = 1 : *sin.* φ' = Tt $\left(= \frac{CP^2}{NF} - \frac{CP^2}{ME}\right)$: Tn; und 1 : *cos.* φ' = Tt : tn.

Man ziehe Lm mit Mn parallel, so hat man ein bey m rechtwinklichtes Dreyeck TmL, in welchem der Winkel mTL bekannt ist, nämlich = $\varphi + 90° - \varphi'$ + GTO, wie auch die Seite mL = Mt + tn, und suche Tm, TL; so bekömmt man mn = LM, und LO = TO — TL. Aus den drey Seiten des Dreyecks NTO wird der Winkel O gefunden, und man hat in dem Dreyecke NLO die Seiten LO, NO sammt dem enthaltenen Winkel O, und sucht NL. W. zu f. w.

5. Beyspiel. Wir nehmen die vorige Voraussetzung an, da wir die Senne MN suchten. Es ist Nk = Gk = $\frac{a \cos. \varrho}{\cos. \varphi}$, dessen Logarithmus = 2,0635221. Die Senne NG ist = $2 a \cos. \varrho \times \sin. \frac{1}{2}$ ACB, folglich ist $\frac{1}{2}$ NG = $a \cos. \varrho \times \sin. \frac{1}{2}$ ACB, und indem steht Nk : $\frac{1}{2}$ NG = 1 : *sin.* $\frac{1}{2}$ NkG, oder $\frac{a \cos. \varrho}{\cos. \varphi}$: $a \cos. \varrho \times \sin. \frac{1}{2}$ ACB = 1 : $\cos. \varphi \times \sin.$ $\frac{1}{2}$ ACB = 1 : *sin.* $\frac{1}{2}$NkG, wird $\cos. \varphi \times \sin.$

$\frac{1}{2}$ ACB = *sin.* $\frac{1}{2}$ N*k*G. In unserem Falle, wo $\frac{1}{2}$ ACB = 30′, φ = 45°, wird $\frac{1}{2}$ N*k*G = 0° 21′ 12″, 78, mithin N*k*G = 0° 42′ 25″, 56, und der Logarithmus der Senne NG = 0,1548790. Die Analogie 1 : *tang.* N*k*G = N*k* : NO giebt den Logarithmus NO = 0,1549023. Da der Winkel GN*k* = NG*k* = 89° 38′ 47″, 22, und ON*k* = 90°, muß ONG = 21′ 12″, 78, und NOG = 89° 27′ 21″, 44 seyn. Es steht also *sin.* (89° 27′ 21″, 44) : NG = *sin.* (21′ 12″, 78) : GO, dessen Log. wird — 3,9452240, und kommen ihm 257,2373 Klaster zu. Die Analogie TG (= N*k*) : GO = 1 : *tang.* GTO, giebt GTO = 0° 0′ 15″, 71, und der Winkel *m*TL wird = 89° 30′ 15″, 71; TL*m* = 0° 29′ 44″, 29. Der Logarithmus sowohl der Tangente, als des Sinus von 0° 0′ 15″, 71 ist — 5,8817019; und wenn man setzet *sin.* (0° 0′ 15″, 71) : 1 = GO : OT, wird der Logarithmus TO wieder = 2,0635221, und kann TO von GT nicht merklich unterschieden seyn. Aus diesem aber folgt, daß das Dreyeck NTO mit dem Dreyecke N*k*G gleich, und ähnlich anzusehen sey, und muß demnach der Winkel NTO = 42′ 25″, 56, TON = 89° 38′ 47″, 22 seyn.

Es ist $CT = \frac{CP^2}{NF} = \frac{b^2}{b\ sin.\ \varrho} = \frac{b}{sin.\ \varrho} =$ 162,988127; $Ct = \frac{b}{sin.\ \varrho'} =$ 161,578513.

T*t* = 1,409614. *Log.* T*t* = 0,1491002.

Man hat 1 : *sin.* φ′ = T*t* : T*n*. *Log.* T*n* = 0,0023423. T*n* = 1,005407

1 : *cos.* φ′ = T*t* : *tn*. *Log.* *tn* = — 1,9947620. *tn* = 0,9880116.

Sin.

Sin. ϕ' : 1 = CE : M*t*. *Log.* M*t* = 2,0559583. M*t* = 113,751806; M*n* = M*t* + *tn* = L*m* = 114,739818. *Log.* L*m* = 2,0597141.

Es steht 1 : *tang.* TL*m* (= *tang.* 0° 29′ 44″, 29) = L*m* : T*m*. *Log.* T*m* = − 1,9967652; T*m* = 0,9925793.

Sin. TL*m* : 1 = *m*T : TL. *Log.* TL = 2,0597303. TL = 114,7440817.

Es wird also LM = 0,012828, dessen *Log.* = − 2,1071590, und hält LM 373,48129 Klafter.

Um NL zu finden steht TL : TN = 1 : *tang.* X. X = 45° 15′ 0″, 42; und 1 : *tang.* (X − 45°) = *tang.* $\frac{1}{2}$ (180° − NTL) (= *tang.* 89° 38′ 47″, 22) : *tang.* ($\frac{1}{2}$ TLN − $\frac{1}{2}$ TNL). $\frac{1}{2}$ TLN − $\frac{1}{2}$ TNL = 35° 16′ 38″, 03. Es wird also TNL = 54° 22′ 9″, 19; TNL = 124° 55′ 25″, 25, dessen Supplement NLO = 55° 4′ 34″, 75.

Endlich steht *sin.* TNL : TL = *sin.* NTL : NL *Log.* NL = 0,2411001, welchem 50840,5232 Klafter zustehen.

6. I. Anmerkung. Die Tangente eines Winkels, dessen Senne MN, kann unmöglich viel von NL abweichen. Wenn wir das Dreyeck PNM als ein sphärisches ansehen, dessen Mittelpunkt in *k* der zweyten Figur ist, finden wir die Polhöhe des Punkts O (welcher der mittlere des Bogens NM ist) = 45° 15′ 2″, 3, für welchen der Logarithmus des Halbmessers des Krümmungscirkels = 2,0616486. Dieser Halbmesser sey = R. Nun setzen wir R : $\frac{1}{2}$ MN = 1 : *sin.* des halben Winkels, dessen Senne NM. Es wird dieser = 25′ 58″, 85, mithin der ganze = 51′ 57″, 7; und so wir ferner setzen 1 : *tang.* (51′ 57″, 7) = R : NL, bekommen wir den Logarithmus 3. Fig. I. Taf.

von

von LN = 0,2410909. Diesem stehen 50839,4471 Klafter zu. Der Unterschied von 50840,5232 beträgt 1,0761 Klafter. Wenn man bedenket die kleine Unrichtigkeit der Logarithmen, besonders bey so vielen Analogien, die in diesem Beyspiele vorkommen, so muß man die Berechnung für ziemlich genau halten; denn um ein Paar Klafter zu fehlen, ist genug, daß man in der Bestimmung der Linie NL um 0,000043243 fehle.

7. II. Anmerkung. Nach unserer Voraussetzung hält 1° des Aequators 58826 Klafter, folglich ein Bogen von 51′ 57″,7 50944,94186; es verhalten sich aber die Größen ähnlicher Bögen wie die Halbmesser, und ist demnach wieder der Halbmesser des Aequators zu dem Halbmesser R, wie die gefundene Anzahl der Klafter des Bogens 51′ 57″,7 nach dem Halbmesser des Aequators zu der Zahle nach dem Halbmesser R. Nach der Logarithmenrechnung steht 3600″: 58826 = 3117″,7 : A, dessen Logarithmus 4,7071011 wird. Von diesem ziehe man 2,0625820 (den Logarithmus von 115,5) ab, und setze zu der Differenz 2,6445191 den Logarithmus des R, nämlich 2,0616486, hinzu, so wird 4,7061677, welchem Logarithmus 50835,57 Klafter gebühren.

3. Fig. I. Taf. 8. III. Anmerkung. Wenn wir (3. Fig. I. Taf.) PNM als ein sphärisches Dreyeck ansehen, dessen Halbmesser $= \sqrt{ab}$, und der Logarithmus = 2,0616399, und in dieser Voraussetzung den Bogen NM suchen, gesetzt, daß PN = 45°, PM = 44° 30′, NPM = 1°, so finden wir NM = 0° 51′ 46″,67. Und wenn wir wiederum annehmen, daß 1° des Aequators 58826 Klafter enthalte, so gebühren dem Bogen NM nur 50764,7093, und

wäre

wäre demnach um 70,3837 Klafter kleiner, als wir die Senne NM in der angenommenen Elliptoide gefunden haben. Da in der Elliptoide die Halbmesser der Krümmungscirkel gegen dem Pole zu immer wachsen, und gegen den Aequator abnehmen, so taugt die Voraussetzung, daß die Erde eine Sphäre sey, bey Bögen, die einem Grade nahe kommen, am wenigsten; man muß nämlich vielmehr bey dergleichen Bögen den Halbmesser des Krümmungscirkels annehmen. Nun wollen wir den kürzesten Bogen selbst, der zwischen N und M kann beschrieben werden, suchen, ungeachtet die Berechnung sehr zusammen gesetzt ist, und wegen der Menge der vorkommenden Dreyecke etwas unsicher.

9. III. Aufgabe. Den kürzesten Bogen von N zu M (1. Fig. I. Taf.) zu finden. 1. Fig. I. Taf.

Auflösung. Wir behalten die Polhöhen und die Differenz der Meridiane, wie in der ersten Aufgabe, bey welcher wir schon CF, FN; CE, EM, $CFE = 62^\circ\ 50'\ 1'' = YCB = \beta\alpha\gamma$ gefunden haben, wie auch $MNL = \alpha\beta = 23^\circ\ 59'\ 21'',85$. Es ist aber

$L.\,\mathit{sin}.\ \beta\alpha\gamma = -\ 1{,}9492360$. $L.\,\mathit{cos}.\ \beta\alpha\gamma = -\ 1{,}6595132$. $Log.\ tang.\ \beta\alpha\gamma = 0{,}2897228$. $Log.\ cot.\ \beta\alpha\gamma = -\ 1{,}7102772$.

$Log.\ \mathit{sin}\ \alpha\beta = -\ 1{,}6091329$. $Log.\ \mathit{cos}.\ \alpha\beta = -\ 1{,}9608660$. $Log.\ tang.\ \alpha\beta = -\ 1{,}6482669$. $Log.\ cot.\ \alpha\beta = 0{,}3517331$.

Aus den Analogien für die rechtwinklichten Dreyecke, haben wir $tang.\ \gamma\beta = tang.\ \alpha\gamma \times \mathit{sin}.\ \alpha\beta$. $\beta\gamma = 38^\circ\ 23'\ 15'',38$.

$cot.\,\alpha\gamma = \mathit{cos}.\,\beta\alpha\gamma \times cot.\,\alpha\beta$. $\alpha\gamma = 44^\circ\ 15'\ 29'',62$.

$\mathit{cos}.\ \alpha\gamma\beta = \mathit{sin}.\ \beta\alpha\gamma \times \mathit{cos}.\,\alpha\beta$. $Log.\ \mathit{cos}.\ \gamma = -\ 1{,}9101020$. $\gamma = 35^\circ\ 36'\ 28'',08$.

$\alpha\delta$

$\alpha\delta - \alpha\gamma = \gamma\delta = 0° \; 44' \; 30'', 38$. *Log. tang.* $\gamma\delta = -\; 2{,}1121722$.

tang. $\gamma\varepsilon =$ *cos.* $\gamma \times$ *tang.* $\gamma\delta$. $\gamma\varepsilon = 0° \; 36' \; 11'', 11$.
Es ist also $\beta\varepsilon = 38° \; 59' \; 26'', 49$. *Log. cos* $\beta\varepsilon = -\; 1{,}8905597$.

Cos. $\alpha\varepsilon =$ *cos.* $\alpha\beta \times$ *cos.* $\beta\varepsilon$. $\alpha\varepsilon = 44° \; 44' \; 34'', 17$. Die Polhöhe des Punkts $O = 45° \; 15' \; 25'', 83$. ϱ für die Polhöhe des $O = 45° \; 7' \; 58'', 38$. *Log. sin.* $\varrho = -\; 1{,}8504899$.

Log. $\dfrac{a^2 - b^2}{b} = 0{,}0009431$. *Log.* $\dfrac{a^2 - b^2}{b} \times$ *sin.* $\varrho =$ *Log.* $CK = -\; 1{,}8514330$. $CK = 0{,}710285$.

4. Fig. I. Taf. Itzt stellen wir uns das Dreyeck NPM in der 4. Figur also vor, wie es beynahe unser Beyspiel erfodert, und ziehen Mq, $N\nu$ auf CP perpendikulär, so wird $Mq = CE$, $N\nu = CF$ der 1. Fig. Aus dem schon bestimmten Punkte K ziehe man KN, KM, und beschreibe mit einem beliebigen Halbmesser Kc auf den Planen der Meridiane PNA, PMB die Bögen cb, ca. Auf dem Plane, der durch N, O, M und K geht, beschreibe man gleichfalls den Cirkelbogen bag, und ziehe aus c auf denselben einen Perpendikulärbogen cg. In dem Plane des Meridians PGE, in welchem der Bogen cg liegt, ziehe man KgG, $C\mu$ mit KG parallel, und CL sey der halbe Mitdurchmesser des $C\mu$, der die Linie KG in π durchschneidet, und den Halbmesser des Aequators CE durchschneide KG in D. Endlich mache man My, Nx auf KG perpendikulär.

Aus dieser Vorrichtung ist klar, daß $\nu K = \nu C + CK = NF + CK = 81{,}850952$, dessen *Log.* $= 1{,}9130237$; $qK = qC + CK = ME + CK = 82{,}559022$, und sein *Log.* $= 1{,}9167656$.

Es

Es steht demnach $K\nu : N\nu$ (oder CF) $= 1 :$ *tang.* cb. *L. tang.* $cb = - 1{,}9999834$. $cb = 44^\circ\ 59'\ 56'',05$. $Kq : Mq$ ($=$ CE) $= 1 :$ *tang.* $ca = - 1{,}9924348$. $ca = 44^\circ\ 30'\ 3'',58$.

Die 5. Figur stelle die nämlichen Dreyecke vor, und wir haben $1 :$ *tang.* $ac =$ *cos.* bca ($=$ *sin.* 89°) : *tang.* cd; und *sin.* bd : *sin.* $cd =$ *tang.* bca ($=$ *tang.* 1°) : *tang.* cba. Aus der ersten Analogie finden wir $cd = 44^\circ\ 29'\ 47'',83$, welches vom cb abgezogen, $bd = 0^\circ\ 30'\ 8''$ giebt. Aus der zweyten Analogie bekommen wir den Winkel $cba = 54^\circ\ 22'\ 31'',66$. Es ist *sin.* $cg =$ *sin.* $bc \times$ *sin.* cba. $cg = 35^\circ\ 4'\ 58'',6$. *Log. sin.* $cba = - 1{,}9100161$. 5. Fig. I. Taf.

tang. $bg =$ *tang.* $bc \times$ *cos.* cba. $bg = 30^\circ\ 13'\ 7''$. *Log.* $bg = - 1{,}7018275$.

cos. $ag = \frac{\text{cos. } ac}{\text{cos. } cg}$. $ag = 29^\circ\ 21'\ 22'',61$. *Log. sin.* $ag = - 1{,}6904077$.

Log. sin. $ac = - 1{,}8456694$. *Log. sin.* $cb = - 1{,}8494767$.

Es ist klar, daß die kleinere Achse der Ellipse NOMG (4. Fig. I. Taf.) in dem Meridiane PGE liege, in dem dieser auf sie in G perpendikulär steht. Man hat also μCE $= 90^\circ - cg = 90^\circ - 35^\circ\ 4'\ 58'',6 = 54^\circ\ 55'\ 1'',4 = \alpha$, dessen *Log. sin.* $= - 1{,}9129236$, das gebührende ϱ findet man $= 55^\circ\ 2'\ 2''$; *log. sin.* $\varrho = - 1{,}9135442$; *log. cos.* $\varrho = - 1{,}7582242$. $\varphi = 55^\circ\ 9'\ 1'',96$. *Log. sin.* $\Phi = - 1{,}9141613$. Es wird also *Log.* 4. Fig. I. Taf.

$$C\mu = Log.\ \frac{b \text{ sin. } \varrho}{\text{sin. } \alpha} = 2{,}0613184.$$

$$Log.\ CL = log.\ \frac{a \text{ sin. } \varrho}{\text{sin. } \varphi} = \frac{b \text{ cos. } \varrho}{\text{cos. } \varphi} = 2{,}0619649;$$

diesem entsprechen 115,33601.

$Log.\ CD = log.\ \frac{a^2 - b^2}{a} \times cos.\ \varrho = -1{,}7572931.$

Der Winkel $C\pi D$ wird $= 90^\circ + \alpha - \varphi = 89^\circ\ 45'\ 59'', 44$, und $Log.\ C\pi = Log.\ \frac{CD \times sin.\ \alpha}{sin.\ C\pi D} = log.\ \frac{CD \times sin.\ \alpha}{cos.\ (\varphi - \alpha)} = -1{,}6702265$, welchem 0,46797 zustehen.

$CL + C\pi = 115{,}80398.\ Log. = 2{,}0637235.$

$CL - C\pi = 114{,}86804.\ Log. = 2{,}0601992.$

$log.\ \pi G^2 = Log.\ \frac{C\mu^2 (CL^2 - C\pi^2)}{CL^2} = 4{,}1226298.$

$Log.\ \pi G$, oder der Hälfte der kleinern Achse $= 2{,}0613148.$

Der Logarithmus der Hälfte der größern Achse wird $Log.\ \frac{a \times \pi G}{C\mu} = 2{,}0625784.$ Der Logarithmus des Quotienten, wenn die größere durch die kleinere Achse dividiert wird, $= 0{,}0012636.$

$Log.\ Nx = L.\ \frac{CF \times sin.\ gb}{sin.\ cb}$, und $Log.\ My = log.\ \frac{CE \times sin.\ ag}{siu.\ ac}$. Man erhält $log.\ Nx = 1{,}7653579$, und $log.\ My = 1{,}7539387.$

Wenn wir die Hälfte der größeren Achse der Ellipse NMG, $\mathfrak{A}$ nennen, so wird $Nx = \mathfrak{A}\ cos.\ \varrho$, oder $log.\ Nx - log.\ \mathfrak{A} = log.\ cos.\ \varrho$. Eben so wird $log.\ My - log.\ \mathfrak{A} = log.\ cos.\ \varrho'$. Man findet für N in der gesuchten Ellipse $\varrho = 59^\circ 42' 29'', 25$, und für M, $\varrho' = 60^\circ\ 34'\ 22'', 55$; φ für $N = 59^\circ\ 46'\ 50'', 45$; φ' für $M = 60^\circ\ 38'\ 39'', 15$. Es wird demnach der Bogen MON in der gesuchten El-

Ellipse = $0^{\circ}\ 51'\ 48'',7$; die Polhöhe des mittleren Punkts = $60^{\circ}\ 12'\ 34'',8$; $Log.\ sin.\ \varphi = -1,9384443$; $\varrho = 60^{\circ}\ 8'\ 18'',09$; $log.\ sin.\ \varrho = -1,9381257$. Der Logarithmus des Halbmessers des Krümmungscirkels = $log.\ \frac{a^2\ (sin.\ \varrho)^3}{b\ (sin.\ \varphi)^3} =$ 2,0628862. Es sey dieser Halbmesser = R. Es steht $3600'' : 58826 = 3108'',7 : A$, und
$115,5 : R = A : B$; zusammengesetzt haben wir

$$115,5 \times 3600'' : 58826 \times R = 3108'',7 : B,$$

und B (die Anzahl der Klafter, die der Bogen NM hält) wird 50833,4767, welche nach dieser Berechnung um 2,0933 Klafter kleiner ist, als nach jener, deren wir uns N. 7 (II. Anmerk. II. Aufg.) bedient haben. Allein wir haben schon angemerket, um wie eine kleine Differenz es zu thun sey, daß man um ein Paar Klafter fehle, nämlich etwas weniger, als um $0'',12$, welches bey einer so weitläuftigen Berechnung kaum zu vermeiden ist.

10. Anmerkung. Wenn in die Berechnung der Senne NM ein Fehler von 0,000043242, oder in jene des Bogens (7) von $0'',12$ eingeschlichen, daß sie zu groß ausgefallen; oder wenn die Berechnung des kürzesten Bogens um eben so viel, das ist, um $0'',12$ zu klein, so ist leicht zu erachten, daß man zu grösserer Sicherheit zwischen 50835,57, und 50833,4767 ein Mittel annehmen müsse, nämlich 50834,5233.

Wenn wir diesen Bogen annehmen, so müssen wir auch die Senne NM daraus bestimmen. Wir wollen den Bogen = $51'\ 48'',7$ beybehalten, und setzen: wie sich der Halbmesser des Cirkels zu $2\ sin.\ \frac{1}{2}$ $(51'\ 48'',7)$ verhält, also ist der Halbmesser des

Krümmungscirkels in dem mittleren Punkte des Bogens NM zu der Senne NM. Den Logarithmus des Halbmessers dieses Krümmungscirkels haben wir = 2,0628862 gefunden, und jener der Senne wird = 0,2410358; auf Klafter reduciert = 4,7061457, welchem 50833 zu stehen.

Wenn man endlich setzet, der Halbmesser eines Cirkels verhält sich zu der Tangente von 51′ 48″, 7, wie der Halbmesser des Krümmungscirkels des Bogens NOM in dem mittleren Punkte zu dem vierten Gliede, so findet man den Logarithmus = 0,2410727, und diesem entsprechen 50837,414 Klafter, der Logarithmus davon ist 4,7061826. Diese Größe muß der Linie NL sehr nahe kommen,
Fig. N. 1. Taf. und wir wollen sie auch dafür annehmen. (2. Fig. N. 1. I. Taf.)

11. Allein wir wollen sehen, was für ein Unterschied zwischen der angenommenen Linie NL wäre, die wir aus den Polhöhen der Punkte N, M, und der Differenz der Meridiane bestimmt haben, und jener, die man bekommen würde, wenn der Beobachter die Höhe LI, und den Winkel TNL nehmen sollte. Denn es ist klar, daß von dem Beobachter in N die Höhe des Punkts I in einem Plane genommen werde, der auf seinen Horizontalplan perpendikulär steht; da nun allein in zweyen Fällen LI sich in dem Vertikalplane des Beobachters befinden kann, wird sowohl der Azimuthalwinkel TNH, als der Vertikalwinkel INH von TNL und INL unterschieden seyn. Diesen Unterschied wollen wir nun in dem angenommenen Beyspiele bestimmen.

12. IV. Aufgabe. Wenn man die Winkel INL, TNL berechnet hat, die Winkel INH, TNH daraus zu finden.

Auf-

Auflösung. Aus der zweyten Aufgabe sind die Winkel NLO, KLO bekannt; den Winkel KLN aber findet man aus dem Dreyecke NLK, in welchem man $NL = 1{,}742984$, $NK = \frac{pK}{fin.\ cb}$, $LK = \frac{\pi K}{fin.\ ca} + LM$ hat. Die Analogie $NL \times LK : (\frac{1}{2} NK + \frac{1}{2} LK - \frac{1}{2} NL) (\frac{1}{2} NK + \frac{1}{2} NL - \frac{1}{2} LK) = 1 : (fin.\ \frac{1}{2} NLK)^2$ giebt den Winkel $NLK = = 89^\circ\ 10'\ 10'',1$. Wenn man aus dem Mittelpunkte L auf den Planen NTO, TOK, NLK drey Cirkelbögen $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ beschreibt, hat man ein sphärisches Dreyeck, in welchem nach unserem Beyspiele $\beta\alpha = 55^\circ\ 4'\ 34'',75$; $\alpha\gamma = 89^\circ\ 30'\ 15'',71$, und $\beta\gamma = 89^\circ\ 10'\ 10'',1$, und man findet den Winkel $\alpha\beta\gamma$ aus der Analogie $fin.\ \alpha\beta \times fin.\ \beta\gamma : fin.\ (\frac{1}{2}\alpha\gamma + \frac{1}{2}\beta\gamma - \frac{1}{2}\beta\alpha)\ fin.\ (\frac{1}{2}\alpha\gamma + \frac{1}{2}\beta\alpha - \frac{1}{2}\beta\gamma) = 1 : (fin\ \frac{1}{2}\alpha\beta\gamma)^2$, oder $fin.\ (55^\circ\ 4'\ 34'',75)\ fin.\ (89^\circ\ 10'\ 10'',1) : fin.\ (61^\circ\ 47'\ 55'',53)\ fin.\ (27^\circ\ 42'\ 20'',18) = 1 : (fin.\ \frac{1}{2}\alpha\beta\gamma)^2$. Es wird $\alpha\beta\gamma = 89^\circ\ 25'\ 50'',56$. Es ist klar, daß $\alpha\beta\gamma$ der Winkel sey, unter welchem der Horizontalplan des Beobachters in N gegen den Plan LNI geneigt ist; und wenn man sich noch ein bey a rechtwinklichtes sphärisches Dreyeck $ca\beta$ vorstellet, so ist in diesem der Winkel $c\beta a = \alpha\beta\gamma$. Wir wollen annehmen, der Beobachter habe in dem Vertikalplane INH diesen Winkel $= 30'$ bekommen, und man hat $1 : tang.\ 30' = cot.\ c\beta a$ $(= tang.\ 34'\ 9'',44) : fin.\ a\beta$. Man findet $a\beta = 0^\circ\ 0'\ 17'',07$ beynahe.

Es steht ferner $fin.\ c\beta a : fin.\ ca = 1 : fin.\ c\beta$; und $c\beta$ wird $0^\circ\ 30'\ 0'',9$ beynahe.

Wenn man den Winkel $c\beta$ von NLK = 89° 10′ 10″,1 abzieht, wird NIL = 88° 40′ 9″,2; und es wird *sin.* LIN : NL = *sin.* INL (*sin.* $c\beta$) : LI. Ich finde IL = 450,4629 Klafter; wenn wir nun LM = 373,4813 hinzusetzen, so wird die ganze Perpendikularhöhe MI = 823,9442 Klafter, die mehr denn 11mal größer ist, als unser berufene St. Stephansthurm.

6. Fig. I. Taf. Wir wollen uns das Dreyeck NTO in der 6. Fig. besonders vorstellen, und aus L auf NH einen Perpendikel L*l* fallen lassen, so wird 1 stehen 1 : *sin.* LNH (= *sin.* 17″,07) = NL : L*l*. Ich finde L*l* = 4,1931 Klafter. 2. ist *sin.* *l*HL (= *sin.* (55° 4′ 34″,75 — 17″,07) = *sin.* 55° 4′ 17″,68) : 1 = L*l* : HL. Es wird HL = 5,1144 Klafter. 3. steht 1 : *cos.* LH*l* = HL : *l*H. Man findet *l*H = 2,9283.

2. Fig. N. 1. I. Taf. Allein dieses ist nicht die ganze Correction. Man ersieht leicht, daß der Perpendikel IH (2. Fig. N. 1. I. Taf.) wenn er verlängert wird, nicht auf den Punkt M falle. Man ziehe also aus M auf TO einen Perpendikel MR, und man hat zwey ähnliche Dreyecke ILH, MLR, in welchen IL : LM = HL : LR. Ich finde aus dieser Analogie LR = 4,2404, mithin wird HR = 9,3548 Klafter. Itzt ziehe man

6. Fig. I. Taf. in der 6. Fig. aus R die Linie R*r* mit H*l* parallel, so werden die rechtwinklichten Dreyecke H*l*L, H*r*R ähnlich, und es steht H*l* : HR = *l*L : *r*R; HL : HR = H*l* : H*r*. Wenn NL groß, wie in unserem Beyspiele, verbleibet HR, R*r* immer ein kleiner Theil, und man kann R*r* als die Correction des Azimuthalwinkels annehmen. Durch diese Proportion finde ich *r*R = 7,6698 Klafter, den Winkel HNR = 0° 0′ 31″,22; *r*H = 5,3561 Klafter.

I. Zu-

13. I. Zusatz. Es ist klar, daß das scheinbare Azimuth TNH (2. Fig. N. 1. I. Taf.) mit dem wahren TNL eintreffe, wenn der Winkel $\epsilon\beta a = \alpha\beta\gamma = 90°$. Ist $\alpha\beta\gamma$ ein gespitzter Winkel, so fällt IH gegen T; wird aber $\alpha\beta\gamma$ stumpf, so fällt H im Vergleiche mit L gegen O. 2. Fig. N. 1. I. Taf.

14. II. Zusatz. Man sieht, daß der Plan TNK auf den Plan TNO senkrecht stehe, und wenn L auf T fällt, $\alpha\beta\gamma$ ein rechter Winkel werde. Eben also ist der Plan kNO auf NTO perpendikulär, indem kNT, kNO rechte Winkel sind, und wird $\alpha\beta\gamma = 90°$, wenn L mit O eintrifft. Aus diesem aber folgt, daß in T (oder vielmehr auf der ganzen Linie NT) und O der Unterschied zwischen dem wahren, und scheinbaren Azimuthe verschwinde. Wir haben demnach in der Linie OT zwey Punkte, T und O, in welchen unter dem wahren, und scheinbaren Azimuthe kein Unterschied ist; es muß also zwischen diesen eines seyn, bey welchen der Unterschied der größte ist.

In dem sphärischen Dreyecke $\alpha\beta\gamma$ steht $\sin.\ \beta\gamma : \sin.\ \alpha = \sin.\ \alpha\gamma : \sin.\ \beta$, und wird $\sin.\ \beta = \frac{\sin.\ \alpha \times \sin.\ \alpha\gamma}{\sin.\ \beta\gamma}$. Der Unterschied der Azimuthe ist um so viel größer, wie mehr der Winkel β von 90° abweicht, oder wie größer $\sin.\ (90° - \beta)$ ist, oder wie größer $\cos.\ \beta = \sqrt{\left(1 - \frac{(\sin.\ \alpha)^2\ (\sin.\ \alpha\gamma)^2}{(\sin.\ \beta\gamma)^2}\right)}$.

Es muß also auch $1 - \frac{(\sin.\ \alpha)^2\ (\sin.\ \alpha\gamma)^2}{(\sin.\ \beta\gamma)^2}$ ein Größtes seyn, das ist (weil α eine beständige Größe ist),

$$-\frac{2d.\sin.\alpha\gamma\ (\sin.\alpha\gamma)}{(\sin.\ \beta\gamma)^2} + \frac{2d.\sin.\beta\gamma\ (\sin.\ \beta\gamma)\ (\sin.\ \alpha\gamma)^2}{(\sin.\ \beta\gamma)^4} = 0,$$

$= 0$, oder $\frac{d.\,sin.\,\beta\gamma \times sin.\,\alpha\gamma}{sin.\,\beta\gamma} = d.\,sin.\,\alpha\gamma$, mithin $\frac{d.\,sin.\,\beta\gamma}{sin.\,\beta\gamma} = \frac{d.\,sin\,\alpha\gamma}{sin.\,\alpha\beta}$; $log.\,sin.\,\beta\gamma = log.\,sin.\,\alpha\gamma$; und $sin.\,\gamma\beta = sin.\,\alpha\gamma$. Man hat also die größte Differenz der Azimuthe, wenn der $sin.\,\beta\gamma = sin.\,\alpha\gamma$, und $sin.\,\gamma\beta\alpha = sin.\,\gamma\alpha\beta$. In unserem Beyspiele ist der Winkel $\gamma\alpha\beta = 89^\circ\,7'\,27'',5$, und HNL wird $= 0^\circ\,0'\,27'',5$, wenn es ein Größtes ist. Wenn man NKL sucht, und NK, hat man in dem geradlinichten Dreyecke NLK zwey Winkel NKL, NHL $= \beta\gamma = \alpha\gamma$, und die Seite NK, so findet man auch NL, und daraus LO, die Entfernung des Punkts L von O.

15. III. Zusatz. Wenn man die Correction HR gemacht hat, und RN gefunden, ist klar, daß diese die Tangente des Winkels NkR sey. Denn wenn man sich vorstellet, die Linie RM werde um TO als eine Achse gedrehet, bis sie mit Nk parallel steht, so weis man, daß sie mit Nk in einem Plane liegt, der Pk in dem Puukte k schneidet; diesen Plan aber verläßt die Linie MR bey der Umdrehung um TO niemals; es muß also ihre Verlängerung durch k gehen, und da RNk $= 90^\circ$, ist sie die Tangente des Winkels NkR, daraus man eben den Bogen NM finden kann.

16. Allein wenn man den Bogen NM gemessen hat, und das scheinbare Azimuth TNH genommen, ist eben die Frage, wie man die Correction finden könne. Dieses wollen wir in folgender Aufgabe auseinander setzen. Ich nehme aber an, dieser Bogen sey nicht über 10000 Klafter. Der Logarithmus der Tangente von $10'\,13'',45$ ist $-3,4733552$, welchem nach

dem Halbmesser 1 in Zahlen 0,00294097 entsprechen; und wenn wir setzen: der Halbmesser auf Grade reduciert ist zu 1, wie 10′ 13″,45, oder 613″,45 zu A, so wird der Bogen von 10′ 13″,45 (dessen Logarithmus = — 3,4733541) = 0,00294089. Die Differenz ist = 0,00000008; ist der Halbmesser jener, der dem Krümmungscirkel bey 45° zusteht (dessen Logarithmus = 2,0616336), so wird die Differenz = 0,000000092198, in Klaftern = 0,026905, welche 1,93716 Zoll beträgt. Man kann also die Tangente von 10′ 13″,45 für einen Bogen von 10000 Klaftern annehmen.

17. V. Aufgabe. Man hat das scheinbare Azimuth TNH genommen, und den Bogen NM gemessen; wenn die Polhöhe der Station M gegeben wird, sucht man die Correction, und die wahre Linie NR.

Auflösung. 1. Man nehme den Halbmesser des Krümmungscirkels in N $= \frac{a^2 (\sin. \varrho)^3}{b (\sin. \varphi)^3}$, und reduciere ihn auf Klafter aus folgender Analogie: es verhält sich a zu $\frac{b (\sin. \varphi)^3}{a^2 (\sin. \varrho)^3}$, wie der Halbmesser des Aequators in Klaftern (dessen Logarithmus = 6,5276919) zu dem vierten Gliede. Dann setze man: wie $\frac{a^2 (\sin. \varrho)^3}{b (\sin. \varphi)^3}$ in Klaftern zu dem gemessenen Bogen in Klaftern, also steht 206264″,8 zu der Anzahl der Minuten und Sekunden eben dieses Bogens.

2. Suche man in dem sphärischen Dreyecke bac (5. Fig. I. Taf.) aus dem Winkel b, und den Seiten bc, ba den Bogen ac, und den Winkel bca, und setze: $\sin. bc : \sin. ac = a \cos. \varrho : a \cos. \varrho' =$ 5. Fig. I. Taf.

 cos.

$cos. \varrho : cos. \varrho' = \frac{sin. ac \times cos. \varrho}{sin. bc}$. Aus ϱ' findet man φ' für M. Es gilt aber dieses nur in der Voraussetzung, daß kein merklicher Unterschied zwischen
2. Fig. N. 1. I. Taf. Nk und MK sey (2. Fig. N. 1. I. Taf.). Anderstwo werden wir φ' genauer bestimmen.

3. Suche man in der 2. Fig. N. 1. I. Taf. Nk $= \frac{a\ cos. \varrho}{cos\ \varphi}$, die halbe Senne NG $= a\, cos. \varrho \times sin. \frac{1}{2} bca$, und setze $Nk : \frac{1}{2} NG = a\ cos. \varrho \times sin. \frac{1}{2} bca = 1 : sin. \frac{1}{2} bca \times cos. \varphi = 1 : sin. \frac{1}{2} NkG = cos. \varphi \times sin. \frac{1}{2} bca$; wie auch $1 : tang. NkG = Nk : NO$; und $cos. NkG : Nk = 1 : kO$. Man hat also $OG = kO - Nk$. Setzet man $sin. \varphi : 1 = a\ cos. \varrho : TG$, so hat man $TG = \frac{a\ cos. \varrho}{sin. \varphi}$; und dann steht $\frac{a\ cos. \varrho}{sin. \varphi} : GO = 1 : tang. GTO$. Wenn der gemessene Bogen nicht über 10000 Klafter beträgt, hält der Winkel nicht eine ganze Secunde, und man kann ohne merklichen Fehler TOG $= 90^\circ$ setzen.

4. Aus den drey Seiten des Dreyeckes NTO findet man NTO und TON; aus den Winkeln TNH, TON (welcher von TNO nicht kann unterschieden seyn, so lang GTO nicht eine ganze Minute beträgt) findet man HNO, NHO, und die Vertiefung bey H, welche von jener bey L keinen merklichen Unterschied haben kann. In unserer Voraussetzung, daß man TOG für 90° nehmen kann, findet
7. Fig. I. Taf. man diese Vertiefung auf folgende Art. Da (7. Fig. I. Taf.) zwischen φ' und φ die Differenz nur wenige Minuten beträgt, kann man $G\varphi$, $M\varphi$ für den Halbmes-

messer $\frac{a^2 (\sin. \varrho)^3}{b (\sin. \varphi)^3}$ annehmen, und es wird $\varphi O =$ $\frac{a^2 (\sin. \varrho)^3}{b (\sin. \varphi)^3} + GO$. Es steht demnach $\cos. (\varphi' - \varphi) : \varphi O = 1 : \varphi H$. Von diesem ziehe man $\frac{a (\sin. \varrho)^3}{b (\sin. \varphi)^3}$ $= \varphi M$ ab, so bleibt MH.

5. Man suche aus pN, pK, auch NK, HK $= \frac{a \cos \varrho'}{\cos. \varphi'} + MH$, und aus den drey Seiten NK, HK, NH den Bogen $\beta\gamma$. $\alpha\gamma$ ist $= \varphi + 90° - \varphi' + GTO$; den Bogen $\beta\alpha$ hat man aus dem Winkel NHO; mithin findet man aus diesen drey Seiten den Winkel $\alpha\beta\gamma = c\beta a$, die Correction ꝛc. wie oben in der 4ten Aufgabe. W. zu f. w. 2. Fig. N. 1. I. Taf.

18. Beyspiel. Die Polhöhe der Station N, oder φ, sey $= 45°$, $\log. \frac{a^2 (\sin. \varrho)^3}{b (\sin. \varphi)^3} = 2{,}0616336$; $\frac{a^2 (\sin. \varrho)^3}{b (\sin. \varphi)^3} = 115{,}2408636$; der Logarithmus dieses Halbmessers auf Klafter reduciert $= 6{,}5266435$; der Bogen NM $= 10000$ Klafter; auf Minuten reduciert $10' \, 13'', 45 = ba$ (5. Fig. I. Taf.); $cb = 45°$; $cba = 56°$; $ca = 44° \, 54' \, 17'', 62$; $bca = 8' \, 42'', 27$. $\log. \frac{\sin. ca \times \cos. \varrho}{\sin. cb} = \log.$ $\cos. \varrho' = - 1{,}8497030$; $\varrho' = 44° \, 58' \, 16'', 43$; $\varphi' = 45° \, 5' \, 43'', 8$. Die Differenz seines Complements von ca ist $1'', 49$. $Log.$ N$k = 2{,}0635221$; $\log. \frac{1}{2}$ NG $= - 4{,}9528563$; NkG $= 6' \, 9'', 3$. $Log.$ NO $= - 1{,}3164764$; NO$k = 89° \, 53' \, 50'', 7$. $Log.$ O$k = 2{,}0635228$, welchem $115{,}75048$ 5. Fig. I. Taf.

 zu-

zu stehen. $Nk = Gk = 115,75029306$; $GO = 0,0018694$; *Log.* $GO = -4,2717022$. In unserem Falle ist $GT = Nk$, und aus der Analogie $TG : GO = 1 : tang.\ OTG$, findet man $OTG = 0'',89$, und muß also OT mit GT gleich gehalten werden. $NTO = 6'\ 9'',3$; $\frac{1}{2}NTO = 3'\ 4'',65$; $TON = 90° - 3'\ 4'',65 = 89°\ 56'\ 55'',35$; $HNO = 89°\ 56'\ 55'',35 - 56° = 33°\ 56'\ 55'',35$; $NHO = 56°\ 6'\ 9'',3$; $\frac{a^2\ (\sin.\ \varrho)^3}{b\ (\sin.\ \varphi)^3} = 115,2480636$. $GO = 0,00018694$. $\varphi O = 115,2482505$; *lag.* $\varphi O = 2,0616344$. *Log.* $\varphi H = 2,0616350$. Diesem entsprechen $115,248435$. $MH = 0,0003714$. *Log.* $MH = -4,5698419$. MH in Klaftern $= 10,838$.

Für das Dreyeck NKM finde ich $HK = 115,751518$; $NK = 115,75112$; $HN = 0,342681$; und die Proportion $HN \times NK$; $(\frac{1}{2}NK + \frac{1}{2}HK - \frac{1}{2}HN)\ (\frac{1}{2}NK + \frac{1}{2}NH - \frac{1}{2}HK) = 1 : (\sin.\ \frac{1}{2}NHK)^2$ giebt $NHK = \beta\gamma = 89°\ 53'\ 52''$. $\beta\alpha$ haben wir gefunden $= 56°\ 6'\ 9'',3$; $\alpha\gamma = 89°\ 54'\ 17'',09$; daraus steht $\sin.\ \beta\gamma \times \sin.\ \alpha\gamma = \sin.\ (\frac{1}{2}\alpha\gamma + \frac{1}{2}\beta\alpha - \frac{1}{3}\beta\gamma)\ \sin.\ (\frac{1}{2}\alpha\gamma + \frac{1}{2}\beta\gamma - \frac{1}{2}\beta\alpha) = 1 : (\sin.\ \frac{1}{2}\alpha\beta\gamma)^2$. Es wird $\alpha\beta\gamma = 89°\ 57'\ 14'' = a\beta c$.

Es steht $1 : tang.\ ca = cot.\ c\beta a : \sin.\ \beta a$. Wenn wir $ca = 5'$ annehmen, wird $\beta a = 0'',87$. Aus der Analogie $1 : cos.\ a\beta = cos.\ ac : cos.\ \beta c$ finde ich gar keinen Unterschied zwischen $c\beta$, und $ca = 5'$.

Der Winkel NIH ist $89°\ 48'\ 52''$, und man hat $\sin.\ NIH : NH = \sin.\ 5' : IH$. *Log.* $IH =$

— 4,6969884; in Klaftern 1,1620993, welchem 14,52444 entsprechen.

Es verhält sich der Halbmesser auf Grade reducirt zu 0″,87 wie NH zu Ll in Klaftern (6. Fig. I. Taf.). Der Logarithmus — 2,6250942 giebt 0,042178 Klaft. *sin.* (56° 6′ 9″, 3) : 1 = Ll : HL. *Log.* HL = — 2,7059965; HL = 0,050815 Klaft. 1 : *sin.* (33° 54′ 50″,7) = HL : Hl. *Log.* Hl = - 2,4526421; Hl = 0,028356 Kl. 6. Fig. I. Taf.
lH : HM = LH : LR. (2. Fig. N. 1. I. Taf.) 2. Fig. N. 1. I. Taf.
Log. LR = - 2,578849; LR = 0,037918 Kl.
HR = 0,088733 Klaft. HL : HR = Ll : Rr = 0″,87 : 1″, 51191.
HL : HR = Hl : Hr. Hr = 0,049514. Klaft.

Wenn wir demnach die Correction des Azimuths anwenden, wird der Winkel TNH = 56° 0′ 1″, 5, NH = 9999,950486, welche wiederum ba = 10′ 13″,45 giebt. Aus diesen Elementen wenn ich noch einmal das Dreyeck bca (5. Fig. I. Taf.) berechne, finde ich für die Station M φ' = 45° 5′ 42″. 5. Fig. I. Taf.

19. I. Anmerkung. Man pflegt auf einer Kugelfläche anzunehmen, daß die Depressionen zweyer Stationen unter den scheinbaren Horizon einer dritten sich verhalten wie die Quadrate der Entfernungen. Nach dieser Regel finde ich HM = 14,925, wenn ich setze $NO^2 : NH^2 = GO : MH$. Wir haben aber HM = 10,838 bekommen, und der Unterschied 4,087 Kl. ist sehr beträchtlich, daß man also bey dergleichen Distanzen die Hypothese nicht kann gelten lassen.

20. II. Anmerkung. Wenn die Station M auf dem nämlichen Meridiane mit N wäre, und der Winkel TNH = 0°, obschon in dem Azimuthe keine Verbesserung zu machen wäre, so müßte man doch aus der Linie NH die Linie NL suchen. Wir wollen se-

tzen,

7. Fig. I. Taf. ßen, in der 7. Fig. I. Taf. entspreche G der Station N, und μ der Station M, und man habe die Linie Gi aus der Auflösung eines Dreyeckes gefunden, oder auf was immer für eine Art sich bekannt gemacht, und den Winkel iGh beobachtet; man verlangt daraus GL zu finden, wenn der Bogen Gμ nicht über einen Grad beträgt. Man nehme den Halbmesser des Krümmungscirkels in $G = Gf = \frac{a^2 (\sin. \varrho)^3}{b (\sin. \varphi)^3}$; der genommene Winkel iGh sey $= \varepsilon$, $iG = m$, so wird $ih = m \sin. \varepsilon$, $hG = m \cos. \varepsilon$; wenn man ib mit TG parallel zieht, wird $bG = ih$, und $fb = m \sin. \varepsilon + \frac{a^2 (\sin. \varrho)^3}{b (\sin. \varphi)^3}$, und es steht $fb \left(m \sin. \varepsilon + \frac{a^2 (\sin. \varrho)^3}{b (\sin. \varphi)^3}\right) : bi (= Gh = m \cos. \varepsilon) = fG \left(\frac{a^2 (\sin. \varrho)^3}{b (\sin. \varphi)^3}\right) : GL$

$$= \frac{m \cos. \varepsilon \times a^2 (\sin. \varrho)^3}{m \sin. \varepsilon \times b (\sin. \varphi)^2 + a^2 (\sin. \varrho)^3}.$$

8. Fig. I. Taf. 21. VI. Aufgabe. Es werden (8. Fig. I. Taf.) die Polhöhen der Punkte M, n gegeben, mithin auch Ck, CK; man zieht aus K mit kn eine Parallinie KN, und sucht die Polhöhe des Punkts N, oder den Punkt $\varkappa$, in welchem die Normale in N durch die Achse geht, und den Winkel $\varkappa$NK.

Auflösung. Da KN mit kn parallel ist, steht $Ck : Cr = CK : CR$, oder wenn die Polhöhe des $M = \varphi$, des $n = \varphi'$, $\frac{b}{a} \tan g. \varphi = \tan g. \varrho$; $\frac{b}{a} \times \tan g. \varphi' = \varrho'$, $\frac{a^2 - b^2}{b} \sin. \varrho' : \frac{a^2 - b^2}{b} \sin. \varrho =$

a^2

$\frac{a^2-b^2}{a}$ $cos.\,\varrho'$: CR $= \frac{a^2-b^2}{a} \times \frac{sin.\,\varrho \times cos.\,\varrho'}{sin.\,\varrho'} =$
$\frac{a^2-b^2}{a} \times \frac{sin.\,\varrho}{tang.\,\varrho'}$.

Man ziehe Cμ mit kn parallel, und nehme in der Formel des Halbmessers C$\mu = \frac{b\, sin.\,\varrho}{sin.\,\alpha}$, anstatt α das φ', und für ϱ den Bogen r, dessen Tangente $= \frac{a}{b}\, tang.\,\varphi'$. Die Polhöhe des Punkts μ nenne man Φ, also, daß $\frac{a}{b}\, tang.\, r = tang.\,\Phi$. Man suche auch die Hälfte des Mitdurchmessers CL $= \frac{a\, sin.\, r}{sin.\,\Phi}$. Der Winkel C$\pi$R (oder sein Supplement) ist $90° - (\Phi - \varphi')$, und es steht $cos.\,(\Phi - \varphi') : sin.\,\varphi' = \frac{(a^2-b^2)\, sin.\,\varrho}{a\, tang.\,\varrho}$: C$\pi = \frac{(a^2-b^2)\, sin.\,\varrho \times sin.\,\varphi'}{a\, tang.\,\varrho' \times cos.\,(\Phi - \varphi')}$.

Man sucht auch πN aus der Analogie CL^2 : CL^2 — Cπ^2 = Cμ^2 : πN^2, und setzet 1 : $sin.$ NπL ($cos.\,(\Phi - \varphi')$) = πN : Nq; wie auch 1 : $cos.$ NπL (= $sin.\,(\Phi - \varphi')$) = πN : πq; man erhält dadurch Nq und πq, folglich Cq = Cπ + πq; dann hat man Cq : Nq = 1 : $tang.$ NCq. Man ziehe von NCq den Winkel RCπ (= $90° - \Phi$) ab, so bleibt NCA. Diesen nenne man = α', und man hat die Polhöhe des Punkts N, wenn man $\frac{a^2}{b^2} \times tang.\,\alpha'$ sucht. Endlich ziehe man von der Polhöhe des n die Polhöhe des N ab, so bleibt der Winkel $\varkappa$NK. Denn da kn mit KN parallel, ist $\varkappa\nu k$ = $\varkappa$NK. W. zu f. w.

Wir werden unten (37) eine etwas kürzere Methode KN, und daraus die Polhöhe des Punkts N zu finden, anführen; doch werden wir uns unterdessen beyder gebrauchen.

22. VII. Aufgabe. Es werden drey Winkel
9. Fig. II. Taf. A, B, C (9. Fig. II. Taf.) gegeben, derer Summe größer als 180°; man verlangt auf der Elliptoide GPHQ ein Dreyeck PMN, dessen zwey Bögen Meridiane sind; der Plan aber des dritten muß durch die Normale eines der Punkte M, N gehen, also, daß der Winkel beym Pole, und jener, zum Beyspiele bey M, durch dessen Normale MK der Plan des Bogens MN geht, den gegebenen genau gleich sind; der dritte N aber in den meisten Fällen von dem dritten gegebenen nur unmerklich abweiche.

Auflösung. Man suche aus den gegebenen Winkeln A, B, C die drey Seiten AB, BC, CA nach der XIII. Aufg. Geomet. Sphæric. Nr. 143, und stelle sich eine doppelte Elliptoide auf dem gemeinschaftlichen Aequator vor, nämlich GPHEDG, und GΠHEDG, in welcher OP : OG = OG : OΠ. Man nehme in dem Aequator GDEH den Bogen DE von so viel Graden, als dem Winkel beym Pole ABC zustehen, und beschreibe die Meridiane Πμ D, PMD; Πν E, PNE. Mit einem beliebigen Halbmesser OA beschreibe man auf den Planen der Meridiane die Bögen BA, BC und AC auf dem Plane der Linien OA, OC, die man bis an μ und ν verlängert. Aus μ lasse man auf den Plan des Aequators einen Perpendikel μR fallen, der in M durch den Meridian PMD geht. Aus dem, was wir in der I. Abhandl. über eine Meth. ꝛc. erwiesen haben, ist klar, daß wenn wir aus M eine mit μO parallele Li-

Linie MK ziehen, diese die Normale des Meridians PMD in M sey, und die Winkel AOB, MKP gleich. Eben so wenn aus *v* ein Perpendikel *vn* S auf den Aequator gezogen wird, und *nk* mit *v*O parallel, wird der Winkel BOC mit P*kn* gleich. Zieht man endlich KN mit *kn* parallel, so wird auch der Winkel PKN mit BOC gleich seyn.

Nun beschreibe man aus dem Mittelpunkte K die Cirkelbögen *ab*, *bc*, *ac*, und es ist einleuchtend, daß die Dreyecke ABC, *abc* gleiche Winkel haben; denn die Seiten BA, *ba*; BC, *bc*, und die enthaltenen Winkel ABC, *abc* sind gleich. Macht man endlich durch die Punkte M, K, N in der zusammengedrückten Elliptoide einen Schnitt, so hat man ein sphäroidisches Dreyeck, in welchem die Winkel P und M den B, und A genau gleich sind; der dritte N aber wird in den meisten Fällen von C nur sehr wenig, oder unmerklich abweichen, und wir werden diese Abweichung alsogleich bestimmen.

Was den Winkel P betrifft, bedarf man keines Beweises; denn die Tangenten der Bögen PM, PN sind auf die gemeinschaftliche Achse eben also perpendikulär, wie in dem sphärischen Dreyecke *abc* die Tangenten der Bögen *ba*, *bc* auf dem Halbmesser *b*K. Es ist aber MK die Normale in M des Meridians, auf den Berührungsplan der Elliptoide in M senkrecht, folglich auch auf die Tangente in M des Bogens MN, und die Tangenten in M des Meridians, und des Bogens MN machen den nämlichen Winkel, den die Tangenten in *a* der Cirkelbögen *ab*, *ac* enthalten. Allein um die Abweichung des Winkels N von C oder *c* füglicher zu berechnen, wollen wir einen Lehnsatz einrücken.

23. Lehn-

10. Fig. II. Taf. 23. Lehnsatz. Wenn MK (10. Fig. II. Taf.) der gemeinschaftliche Durchschnitt der Plane des Meridians und der Ellipse MN, zugleich auf den Meridian in M normal ist, ist er auch auf die Ellipse MN in eben diesem Punkte normal; ist aber der gemeinschaftliche Durchschnitt NK auf den Meridian in N nicht normal, sondern zum Beyspiele Nk, so kann NK auch auf die Ellipse MN in N nicht normal seyn, sondern eine andere Linie N$\varkappa$, die außer dem Plane des Meridians ist, es wäre denn der Plan des Meridians PN auf den Plan MNK perpendikulär.

Beweis. Wenn es möglich, sey MZ auf MN in M normal. Da gesetzt wird, MK sey auf den Meridian MP in M normal, ist sie auch auf Mϑ, die Tangente in M der Ellipse MN, perpendikulär, folglich sind zwey Linien MZ, MN auf die dritte Mϑ, die mit ihnen in einem Plane liegt, perpendikulär, welches nicht seyn kann. Und dieses war das Erste.

Man setzt, NK sey in N auf die Ellipse MN perpendikulär, aber nicht auf den Meridian. NT sey die Tangente in N eben dieser Ellipse MN. Indem sowohl Nk als NK auf NT senkrecht stehen, ist NT auf den Plan kNK, das ist, auf den Plan des Meridians, perpendikulär; und da der Plan MKN durch die Linie NT geht, ist auch dieser Plan auf den Plan des Meridians perpendikulär, welches nur dazumal geschehen kann, wenn NK mit der kleinern Achse der Ellipse MN eintrifft. Ist dieses nicht, so ziehe man auf den Punkt N der Ellipse MN einen Perpendikulärbogen nNν. Es muß der Plan dieses Bogens nothwendig durch die Normale in N der Ellipse MN gehen, und weil man setzt, NK sey nicht die Normale des Meridians in N, sondern Nk, muß die Normale des Bogens nNν mit Nk eintreffen (denn

wir

wir haben erwiesen, daß eine aus den Normalen, entweder des Perpendikulärbogens $nN\nu$, oder der Ellipse MN, mit der Normale des Meridians eintreffen müsse); und da wir auch gesetzt haben, NK sey nicht die kleinere Hauptachse der Ellipse MN, folgt unläugbar, daß die Normale in N der Ellipse MN außer des Plans des Meridians liegen müsse, wie zum Beyspiele $N\varkappa$, also, daß NT auf den Plan $\varkappa Nk$, oder auf den Plan des Bogens $nN\nu$ senkrecht stehe. Welches das Zweyte war.

24. VIII. Aufgabe. Den Unterschied des sphäroidischen Winkels PNM (9. Fig. II. Taf.) und des sphärischen bca, oder BCA zu bestimmen. 9. Fig. II. Taf.

Auflösung. Man gedenke in der 11. Figur (II. Taf.), es seyen die Linien NK, Nk, und MK die mit eben diesen Buchstaben bezeichneten Linien der 9. Figur; PN der Meridian, GK die verlängerte kleinere Achse der Ellipse NM, und $N\varkappa$ ihre Normale in N. Man ziehe in dem Plane dieses Bogens αN auf NK senkrecht, wie auch βN in dem Meridionalplane. Es ist klar, daß der Winkel $\alpha N\beta$ dem sphärischen bca gleich sey; zieht man aber in dem Plane des Meridians δN auf Nk, wie auch in dem Plane MGN die Linie γN auf $N\varkappa$ perpendikulär, so wird $\gamma N\delta$ dem sphäroidischen Winkel PNM gleich, indem die Normale des Meridians kN sowohl auf $N\delta$, als auf $N\gamma$ senkrecht steht, da beyde in dem Berührungsplane der Elliptoide in N liegen. Man verlängere KN in π, und beschreibe mit einem beliebigen Halbmesser in dem Meridianplane (der auf den Berührungsplan $\gamma N\delta$ senkrecht steht) den Quadranten $\beta\pi$, und in dem Plane MKN einen andern $\alpha\pi$, und nehme $\beta\delta$ mit kNK gleich. Eben so findet man $\alpha\gamma = \varkappa NK$, und man hat in dem sphärischen Dreyecke $\delta\pi\gamma$ den

11. Fig. II. Taf. 9. Fig. II. Taf.

Winkel π sammt den Seiten $\delta\pi$, $\gamma\pi$, daraus man $\gamma\delta$, das ist, den sphäroidischen Winkel findet. Da nun in den meisten Fällen die Bögen $\alpha\gamma$, $\beta\delta$ sehr klein, kann $\alpha\gamma$ von $\gamma\delta$ nicht viel unterschieden seyn.

9. Fig. II. Taf. Da der Cirkelbogen bc (9. Fig. II. Taf.) nicht das Complement der Polhöhe des Punkts N, sondern des n mißt, muß man nach der VI. Aufgabe den Winkel kNK, oder in der 11. Figur, den Bogen $\delta\beta$ finden. (11. Fig. II. Taf.) Hat man diesen, findet man auf gleiche Weise $\varkappa NK$ oder $\alpha\gamma$, und dann läßt sich das sphärische Dreyeck $\delta\pi\gamma$ auflösen. W. zu f. w.

9. Fig. II. Taf. 25. Beyspiel. Es sey (Fig. 9. II. Taf.) $B = b = 58°$, $A = a = 70°$, $C = c = 62°$; $\frac{1}{2} b = 29°$; $\frac{1}{2} a = 35°$; $\frac{1}{2} c = 31°$. Die Analogie ist $\sin. c \times \sin. b : \cos. (\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b - \frac{1}{2} c) \cos. (\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} c - \frac{1}{2} b) = 1 : \cos. \frac{1}{2} bc)^2$, oder $\sin. 62° \times \sin. 58° : \sin. 57° \times \sin. 53° = 1 : (\cos. \frac{1}{2} bc)^2$. Man findet $bc = 37° \; 54' \; 22''$, 24. Gleichfalls steht $\sin. 70° \times \sin. 58° : \sin. 65° \times \sin. 53° = 1 : (\cos. \frac{1}{2} ba)^2$. Es wird $ab = 35° \; 15' \; 31''$, 64. 8. Fig. I. Taf. Wir setzen, in der 8. Fig. I. Taf. PM entspreche der Seite ba, Pn der Seite bc, so haben wir PKM $= 90° - \varphi = 35° \; 15' \; 31''$, 64; $\varphi = 54° \; 44' \; 28''$, 36; $90° - \varphi' = 37° \; 54' \; 22''$, 24, $\varphi' = 52° \; 5' \; 37''$, 36. $Log. \sin. \varrho = - 1{,}9113696$; $log. \sin. \varphi' = - 1{,}8970868$; $log. tang. \varrho' = 0{,}1067725$. $r = 52° \; 12' \; 51''$, 33. $Log. \sin. r = - 1{,}8977961$; $\Phi = 52° \; 20' \; 3''$, 42; $log. \sin. \Phi = - 1{,}8984999$.

$log. C\mu = log. \frac{b \sin. r}{\sin. \varphi} = 2{,}061471$; $log. CL = log. \frac{a \sin. r}{\sin. \Phi} = 2{,}0618782$, $CL = 115{,}32968$;

$90° + \varphi' - \Phi = 89° \; 45' \; 34''$, 34. $Log. C\pi =$

log.

$\log. \frac{(a^2 - b^2)\ \sin.\ \varrho \times \sin.\ \Phi}{a\ \tang.\ \varrho' \times \cos.\ (\Phi - \varphi')} = -\ 1{,}7007467$; $C\pi = 0{,}502496$. $CL + C\pi = 115{,}83218$, $\log. = 2{,}0638293$; $CL - C\pi = 114{,}82718$; $\log.\ 2{,}0600447$. $\log. \pi N = 2{,}0614654$, $\pi N = 115{,}20342$. Man lasse aus N auf CL einen Perpendikel Nq fallen, so steht $N\pi : Nq = 1 : \cos.\ (0^\circ\ 14'\ 25'',66)$. $Log.\ Nq = 2{,}0614615$; wie auch $N\pi : \pi q = 1 : \cos.\ N\pi L = 1 : \sin.\ (0^\circ\ 14'\ 25'',66)$. $Log.\ \pi q = -\ 1{,}5614555$. Endlich steht $Cq : qN = 1 : \tang.\ NCq$. Man findet $NCq = 89^\circ\ 30'\ 34'',67$. Wenn man davon $90^\circ - \Phi = 37^\circ\ 39'\ 56'',58$ abzieht, bleibt $51^\circ\ 50'\ 38'',09 = \alpha'$. Die Polhöhe des Punkts N wird $52^\circ\ 5'\ 6'',64$, dessen Complement $37^\circ\ 54'\ 53'',36 = P\varkappa N$. Wenn man von diesem $90^\circ - \varphi' = 37^\circ\ 54'\ 22'',24$ abzieht, bleibt $\varkappa NK = 0^\circ\ 0'\ 31'',12$. Es ist demnach in der 11. Fig. (II. Taf.) der Bogen $\delta\beta = 0^\circ\ 0'\ 31'',12$. 11. Fig. II. Taf.

Itzt müssen wir erstens (9. Fig.) die Achsen der Ellipse MN; und hernach (11. Fig.) den Winkel $\varkappa NK$ suchen.

In dem Dreyecke abd (9. Fig. II. Taf.) finden wir den Perpendikularbogen $bd = 32^\circ\ 51'\ 3'',74$, $cd = 20^\circ\ 4'\ 48'',5$; mithin ist μCP (4. Fig. I. Taf.) $= 32^\circ\ 51'\ 3'',74$, $\mu CE = 57^\circ\ 8'\ 56'',26 = A$. $Log.\ \sin.\ A = -\ 1{,}9243226$. $Log.\ \cos.\ A = -\ 1{,}7343651$. $r = 57^\circ\ 15'\ 43'',69$. $Log.\ \sin.\ r = -\ 1{,}9248753$. $Log.\ \cos.\ r = -\ 1{,}7330337$. $\Phi = 57^\circ\ 22'\ 30'',41$. $Log.\ \sin.\ \Phi = -\ 1{,}9254247$. 9. Fig. II. Taf. 4. Fig. I. Taf.

$Log.\ C\mu = \log. \frac{b\ \sin.\ r}{\sin.\ A} = 2{,}0612505$. $Log.\ CL$

 $= \log.$

$= log. \frac{a\ fin.\ r}{fin.\ \Phi} = -2,0620326.$ CL $= 115,3539893.$

Log. Cπ $=$ log. $\frac{(a^2 - b^2)\ cof.\ r.\ (fin.\ r)^2}{a\ fin.\ \Phi} =$
$- 1,6564185.$ Cπ $= 0,453334.$ CL $+$ Cπ
$= 115,807323.$ log. $= 2,0637361.$ CL — Cπ
$= 114,9006556.$ log. $= 2,0603225.$ Log. πG
$=$ log. $c = 2,0612472.$ Log. $g = 2,0625787.$

log. $\frac{g}{c} = 0,0012315.$

Man stelle sich vor, es sey PMNA in der
8. Fig. I. Taf. 8. Fig. (I. Taf.) eben die Ellipse MNG; CK ent- spreche der Linie πK; der Winkel PKN dem GNK der 4. Figur, oder vielmehr dem Bogen *dc* der 9ten, und setze Cμ mit KN parallel, folglich PCμ $=$ $dc = 20^\circ\ 4'\ 48'',5$, $A' = 69^\circ\ 55'\ 11'',5.$ log. fin. $A' = - 1,9727643.$ log cof. $A' = - 1,5357168.$ $r' = 69^\circ\ 58'\ 19'',91.$ Log. fin. $r' = - 1,9729090.$ log. cof. $r' = - 1,5346302.$ $\Phi' = 70^\circ\ 1'\ 27'',91.$ Log. fin. $\Phi' = - 1,9730531.$ Log. $(g^2 - c^2) =$ $1,9114190.$ Log. Cμ $= 2,0613919$; log. CL $= 2,0624346.$ CL $= 115,4607979.$ log. Cπ $= - 1,3562354.$ Cπ $= 0,2271095.$ CL $+$ Cπ $= 115,6879074.$ Log. $= 2,0632780.$ CL $-$ Cπ $= 115,2336883.$ Log. $= 2,0615793.$ Log. πN $= 2,0613859.$ πN $= 115,182342.$ Log. πK $= - 1,7935717.$ πK $= 0,621613859.$ KN $=$ $115,8040211.$ Log. KN $= 2,0637237.$ Analogie: $1 :$ cof. $A' =$ KN $: g$ cof. ϱ'. log. cof. $\varrho' =$ $- 1,5368618.$ Es stehen ihm $20^\circ\ 8'\ 7'',56$ zu, und es wird $\varrho' = 69^\circ\ 51'\ 52'',44.$

Log.

$$Log.\ tang.\ \varrho' = 0{,}4357490$$

$$Log.\ \frac{g}{c} = 0{,}0012315$$

$$Log.\ tang.\ \varphi' = 0{,}4369805.$$

Diesem gebühren $69^\circ\ 55'\ 1'',27$. Das Complement $= 20^\circ\ 4'\ 58'',7 =$ (11. Fig. II. Taf.) $G\varkappa N$. 11. Fig. II. Taf.
Die Differenz von GKN ist $0^\circ\ 0'\ 10'',23$.

In dem sphärischen Dreyecke $\pi\beta\alpha$ haben wir $\beta\delta = 0^\circ\ 0'\ 31'',12$; $\alpha\gamma = 0^\circ\ 0'\ 10'',23$, mithin $\pi\delta = 89^\circ\ 59'\ 28'',88$; $\pi\gamma = 89^\circ\ 59'\ 49'',77$. $\pi = 62^\circ$. Wenn wir aus δ auf $\pi\gamma$ einen Perpendikel (der in der Figur nicht gezeichnet ist) fallen lassen, wird $\pi D = 89^\circ\ 58'\ 53'',82$, folglich $\gamma D = 0^\circ\ 0'\ 55'',95$. Die sonst gewöhnliche Analogie $cos.\ \pi D : cos.\ \gamma D = cos.\ \pi\delta : cos.\ \delta\gamma$ wird hier wegen der sehr grossen Bögen vergebens angewendet. Man kann aber zwey rechtwinklichte Dreyecke $\pi D\delta$, $\delta D\gamma$ betrachten. Aus dem ersten findet man δD, wenn man setzet $1 : sin.\ \pi\delta = sin.\ \pi : sin.\ \delta D$. Indem aber der Sinus von $89^\circ\ 59'\ 28'',88$ keinen merklichen Unterschied von dem Halbmesser 1 hat, ist auch der Bogen δD von 62° nichts unterschieden. In dem bey D rechtwinklichten Dreyecke $\delta D\gamma$ hat man $1 : cos.\ \gamma D = cos.\ \delta D : cos.\ \delta\gamma$. Es ist aber wiederum $cos.\ \gamma D$ unmerklich von 1 unterschieden, und man muß demnach auch $cos.\ \delta\gamma = cos.\ \delta D$ annehmen, das ist, der sphäroidische Winkel, den $\delta\gamma$ mißt, ist unmerklich von dem sphärischen, dessen Maaß $= \pi = \alpha\beta$, unterschieden.

26. Wenn man drey Winkel A, F, C (9. Fig. II. Taf.) gäbe, und dürfte kein Bogen ein Meridian seyn, müßte man wenigstens für die Spitze eines der Winkel, zum Beyspiel für F, die Polhöhe wissen. 9. Fig. I. Taf.

 Dann

Dann könnte man aus den Winkeln die drey Seiten AF, FC, CA suchen. Wenn man über dieß auch den aus F auf AC fallenden Perpendikulärbogen FI suchte, wie auch AI, IC, hätte man BI = BF + IF, also, daß BF das Complement der Polhöhe des F vorstellete. In dem rechtwinklichten sphärischen Dreyecke BIA wäre BI, und IA bekannt, und man fände AB. Eben so könnte man in dem rechtwinkichten Dreyecke BIC aus BI, IC den Bogen BC suchen, und man hätte in dem Dreyecke ABC drey Seiten, und fände ABC. Diesem Winkel müßte man den Bogen des Aequators DVE gleich machen. Aus *f* (allwo OF an die verlängerte Elliptoide stößt, fiele der Perpendikel *f*Q*q* auf den Punkt Q der zusammengedrückten Elliptoide, und mit FA, FC parallele Plane, die durch Q giengen, gäben ein sphäroidisches Dreyeck, in welchem aber nur allein der Winkel bey Q dem gegebenen F genau gleich wäre, die übrigen würden von A und C sehr wenig unterschieden seyn, und man könnte den Unterschied nach der VIII. Aufgabe bestimmen.

21. Anmerkung. Wollte man den Bogen NM bestimmen, so hätte man alles, was dazu erfordert wird, nämlich die drey Punkte N, M, und K (V. Aufg. § I. N. 21. Abhandl. über eine Methode ꝛc.) Allein dieses wäre nicht der kürzeste Bogen zwischen N und M, indem dessen Plan nicht durch MK gehen kann.

28. Man wird hier gedenken, es sey nur darum kein merklicher Unterschied zwischen dem sphäroidischen, und gegebenen Winkeln, weil die Differenz der Winkel A und C in sich selbst nicht so beträchtlich und nur 8 Grade beträgt. Wir wollen demnach ein

Bey-

Beyspiel berechnen, in welchem der Unterschied dieser Winkel weit größer ist.

29. Beyspiel. Es sey der Winkel B $= 38°$, A $= 130°$, C $= 26°$. Man findet AB $= 33° 43' 18'', 1$; BC $= 75° 57' 38'', 42$. $\phi = 56° 16' 41'', 9$; $\varrho = 56° 9' 48'', 35$; $\log. \sin. \varrho = - 1,9194072$. $\phi' = 14° 2' 21'', 58$. $\text{Log.} \sin. \phi' = - 1,3848690$. $\text{Log. tang.} \phi' = - 1,3980393$. $\varrho' = 13° 58' 51'', 37$. $\log. \text{tang.} \varrho' = - 1,3961551$; $r = 14° 5' 52'', 58$; $\log. \sin. r = - 1,3866418$. $\Phi = 14° 9' 24'', 4$. $\log. \text{tang.} \Phi = - 1,4018077$. $\log. \sin. \Phi = - 1,3883808$. $\text{Log. C}\mu = \log. \frac{b \sin. r}{\sin. \phi'} = 2,0624706$. $\log. \text{CL} = \log. \frac{a \sin. r}{\sin. \Phi} = 2,0608430$. $\text{CL} = 115,048439$. $90° + \phi' - \Phi = 89° 52' 57'', 18$. $\log. \sin. = - 1,9999991$. $\text{Log.} (a^2 - b^2) = 2,0616409$. $\text{Log. C}\pi = \log. \frac{(a^2 - b^2) \sin. \phi' \times \sin. \varrho}{a \text{ tang. } \varrho' \cos. (\Phi - \phi')} = - 1,9071209$. $\text{C}\pi = 0,807459$. $\text{CL} + \text{C}\pi = 115,855898$. $\log. = 2,0639181$. $\text{CL} - \text{C}\pi = 114,24098$. $\text{Log.} = 2,0578219$. $\text{Log. } \pi\text{N} = 2,0624976$. Analogie $1 : \sin. (\Phi - \phi') = \pi\text{N} : \pi q$. $\pi q = 0,236715$. $\text{C}\pi + \pi q = \text{C}q = 1,044264$. $\text{Log. C}q = 0,0187695$, Analogie : $1 . \cos. (\Phi - \phi') = \pi\text{N} : \text{N}q$. $\text{Log. N}q = 2,0624967$. Analogie $\text{C}q : \text{N}q = 1 : \text{tang. NC}q$. $\text{NC}q = 89° 28' 54'', 96$. $90° - \Phi = 75° 50' 35'', 6$. Dieser Winkel von $\text{NC}q$ abgezogen giebt $\alpha' = 13° 38' 19'', 36$. Die Polhöhe des Punkts N wird $13° 45' 11'', 07$, dessen Complement $= 76° 14' 48'', 94 = \text{P}\varkappa\text{N}$. Wenn man davon $90° - \phi' = 75° 57' 38'', 42$ abzieht, bleibt $\varkappa\text{NK} = 0° 17' 10'', 52 = \delta\beta$ in der 11. Figur.

Für die Ellipse MN findet man (9. Fig. II. Taf.) $bd = 25^\circ\, 10'\, 5'',47$, $cd = 74^\circ\, 27'\, 9'',64$. Es wird demnach $A = 64^\circ\, 49'\, 54'',53$. *Log. sin.* $A = -\ 1,9566790$. *Log. cos.* $A = -\ 1,6286717$. $r = 64^\circ\, 55'\, 37'',97$. *Log. sin.* $r = -\ 1,9570180$. *log. cos.* $r = -\ 1,6271294$. $\Phi = 65^\circ\, 1'\, 21'',51$. *log. sin.* $\Phi = -\ 1,9573557$. *Log.* $C\mu = 2,0610368$. *log.* $CL = 2,0622443$. $CL = 115,4102387$. *Log.* $C\pi = -\ 1,5828673$. $C\pi = 0,3916233$. $CL + C\pi = 115,801862$. *log.* $= 2,0637156$. $CL - C\pi = 114,9813846$. *log.* $= 2,0606275$. *Log.* $c = 2,0609640$. *Log.* $g = 2,0625092$.

Log. $\frac{g}{c} = 0,0015452$. *Log.* $(g^2 - c^2) = 1,9757044$.

$A' = 90^\circ - dc = 15^\circ\, 32'\, 50'',36$. *Log. sin.* $A' = -\ 1,4282126$. *log. cos.* $A' = -\ 1,9838109$. $r' = 15^\circ\, 36'\, 0'',16$. *log. sin.* $r' = -\ 1,4296240$. *log. cos.* $r' = -\ 1,9836995$. $\Phi' = 15^\circ\, 39'\, 10'',53$. *Log. sin.* $\Phi = -\ 1,4310571$. *Log.* $C\mu = 2,0623754$. *Log.* $CL = 2,0610761$. $CL = 115,10021164$. *Log.* $C\pi = -\ 1,3250255$. $C\pi = 0,26000732$. $CL + C\pi = 115,3002164$. *Log.* $= 2,0620558$. $CL - C\pi = 114,840230432$. *log.* $= 2,060094$. *Log.* $\pi N = 2,0623742$. *Log.* $K\pi = -\ 2,7723318$. *Log.* $KN = 2,0626324$. Analogie $1 : KN = cos.\ A' : g\ cos.\ \varrho'$. *Log. cos.* $\varrho' = -\ 1,9838986$. Diesem entsprechen $74^\circ\, 29'\, 39'',65$, und es wird $\varrho' = 15^\circ\, 30'\, 20'',35$. Man findet daraus $\varphi' = 15^\circ\, 33'\, 29'',69$; sein Complement $74^\circ\, 27'\, 30'',31$ ist um $20'',67$ größer, als cd. In
11. Fig. II. Taf. der 11. Fig. hat man also $\delta\beta = 0^\circ\, 17'\, 10'',52$; $\alpha\gamma = 0^\circ\, 0'\, 20'',67$, oder $\pi\delta = 89^\circ\, 42'\, 49'',48$; $\pi\gamma = 89^\circ\, 59'\, 39'',33$; $\pi = 26^\circ$. Man findet

$\delta\gamma$,

$\delta\gamma$, oder den sphäroidischen Winkel $= 26^\circ 0' 5'', 05$, das ist, um $5'', 05$ größer, denn der sphärische ist, welches bey einem so großen Unterschiede der Seiten, und Winkel des Dreyeckes ABC in der That eine so kleine Differenz ist, daß man billig sagen könne, der Unterschied sey in den meisten Fällen unmerklich.

30. Vielleicht wird man hieraus schließen wollen, man könne wohl auch den Plan des Bogens MN durch den Mittelpunkt der Elliptoide gehen lassen, ohne daß daraus ein merklicher Unterschied der Winkel von den sphärischen entstehe, indem die Differenz der Erdachse und des Durchmessers des Aequators so klein ist. Wir wollen dieses durch ein Beyspiel untersuchen, die Methode aber in folgender Aufgabe vortragen.

31. IX. Aufgabe. Er werden drey Winkel A, B, C (12. Fig. II. Taf.) gegeben. Man sucht ein sphäroidisches Dreyeck, dessen zwey Bögen Meridiane sind, des dritten Plan aber durch den Mittelpunkt der Sphäroide geht, und fraget, wie viel seine Winkel von den gegebenen unterschieden sind? 12. Fig. II. Taf.

Auflösung. Aus den drey Winkeln suche man die Seiten BA, BC, AC, und beschreibe aus dem Mittelpunkte O der Sphäroide mit einem beliebigen Halbmesser AO auf den Planen der Meridiane PD, PE die Bögen AB, BC, wie auch den dritten AC auf dem Plane der Linien OM, ON. Es wird der Bogen des Aequators zwischen den Meridianen PMD, PNE dem Winkel B gleich seyn, und das Dreyeck BAC wird die gegebenen Winkel haben. Man nehme $90^\circ - AB = MOD = \alpha$, und $\frac{a^2}{b^2}$ *tang.* $\alpha =$ *tang.* ϕ, so hat man die Polhöhe des

Punkts M auf der Elliptoide $= \varphi$, die bis an die Achse verlängerte Normale in M des Meridians MK, dann auch KMO $= \varphi - \alpha$.

In dem sphärischen Dreyecke BAC suche man den Perpendikulärbogen BF, der aus B auf AC fällt, wie auch AF, FC. Es sey $90^\circ - BF = A$, $\frac{a^2}{b^2}$ *tang.* A $=$ *tang.* Φ, $\frac{a}{b}$ *tang.* A $=$ *tang.* R, und man findet OV die Hälfte der kleineren Achse der Ellipse HMNG $= \frac{b \, sin. \, R}{sin. \, A}$, welche wir $= c$ setzen wollen; die Hälfte der größeren ist $= a$. Das Complement von AF giebt HOM $= \mathfrak{A}$, und $\frac{a}{c}$ *tang.* $\mathfrak{A} =$ *tang.* $\mathfrak{R}$; $\frac{a^2}{c^2}$ *tang.* $\mathfrak{A} =$ *tang.* $\mathfrak{P}$. Man findet auch QMO $= \mathfrak{P} - \mathfrak{A}$. Es ist Q der Punkt der Achse VFO, in welchem diese von der Normale in M der Ellipse HMNG, geschnitten wird, wenn beyde verlängert werden; gleichwie auch S der Durchschnitt der Normale in N eben dieser Ellipse mit ihrer verlängerten kleineren Achse ist.

Man verlängere KM (die Normale des Meridians in M) in π; ziehe αM die Tangente in M des Meridians, auf MK; und γM, die Tangente in M der Ellipse HMNG, auf MQ senkrecht; beschreibe aus dem Mittelpunkte M die Quadranten $\pi\alpha$, $\pi\gamma$, die auf den Berührungsplan αMγ perpendikulär sind. Man ziehe auch in dem Meridianplane Mβ, und in dem Plane HMNG die Linie Mμ auf MO perpendikulär, so ist klar, daß βMμ dem Winkel BAC, und αMγ dem PMN gleich sey, βMα aber $=$ KMO, und μMγ $=$ QMO. In dem sphäri-

schen

schen Dreyecke $\beta\mu\pi$ hat man also $\pi\beta = 90° - \beta\alpha = 90° - (\varphi - \alpha)$; $\pi\mu = 90° - \mu\gamma = 90° - (\mathfrak{P} - \mathfrak{A})$ und $\beta\mu =$ BAC, und findet den Winkel $\beta\pi\mu = \alpha\gamma =$ PMN.

Auf gleiche Weise hat man aus dem Complemente von FC den Winkel NOG $= \mathfrak{A}'$; $\frac{a}{c}$ *tang.* $\mathfrak{A}' =$ *tang.* $\mathfrak{R}'$; $\frac{a^2}{c^2}$ *tang.* $\mathfrak{A}' =$ *tang.* $\mathfrak{P}'$; ONS $= \mathfrak{P}' - \mathfrak{A}'$, kNO $= \varphi' - \alpha'$; und wenn ηN, δN auf ON, εN aber auf Nk, und λN auf NS senkrecht stehen, wird $\delta\eta =$ BCA; $\delta p = 90° - (\mathfrak{P}' - \mathfrak{A}')$, $\eta p = 90° - (\varphi' - \alpha')$, und man findet $\delta p \eta = \lambda\varepsilon =$ PNM. W. zu f. w.

32. Beyspiel. Wir wollen das erste Beyspiel der VIII. Aufgabe (25) hernehmen, und auf die gegenwärtige anwenden. Es sey B $= 58°$, A $= 70°$, C $= 62°$, und es wird wie oben, AB $= 35° 15' 31'', 64$; BC $= 37° 54' 22'', 24$; AC kann man aus der Analogie *sin.* C : *sin.* AB $=$ *sin.* B : *sin.* AC suchen, und man bekömmt AC $= 33° 40' 23''$. Nach den Formeln der rechtwinklichten Dreyecke findet man BF $= 32° 51' 3'', 74$; AF $= 12° 46' 34'', 47$; CF $= 20° 4' 48'', 53$. $\mathfrak{A} = 57° 8' 56'', 26$. *Log. sin.* $\mathfrak{A} = -$ 1,9243226. $\mathfrak{R} = 57° 15' 43'', 48$. *Log. sin.* $\mathfrak{R} = -$ 1,9248750. *Log.*

$$\text{OV} = \log. \frac{b \sin. \mathfrak{R}}{\sin. \mathfrak{A}} = 2{,}0612502.$$

Wir wollen die Hälfte der kleineren Achse wiederum c, die Hälfte der größeren a nennen. Ferner wird $\alpha =$ MOD $= 54° 44' 28'', 26$; $\varphi = 54° 58' 30'', 78$. $\varphi - \alpha = \beta\alpha = 0' 14' 2'', 42$; $\beta\pi = 90° - (\varphi - \alpha) = 89° 45' 57'', 58$.

$\mathfrak{A} =$

$\mathfrak{A} = 77° 13' 25'', 53$, $\mathfrak{P} = 77° 16' 57'', 95$; $\mu\gamma = 0° 3' 32'', 42$; $\pi\mu = 89° 56' 27'', 58$. Analogie $\sin. (89° 56' 27'', 58) \sin. (89° 45' 57'', 58) : \sin. (35° 5' 15'') \sin. (34° 54' 45'') = 1 : (\sin. \frac{1}{2} \pi)^2$. Man findet $\frac{1}{2} \pi = 35° 0' 0'', 2$, $\alpha\gamma = 70' 0' 0'', 4$. Es ist also der sphärische Winkel BAC um $0'', 4$ kleiner als PNM.

Für den andern Winkel wird NOE $= \alpha' = 52° 5' 37'', 76$; $\varphi' = 52° 20' 4'', 41$, $\varphi' - \alpha' =$ ON$k = \varepsilon\eta = 0° 14' 26'', 65$, $p\eta = 89° 45' 33'', 35$.

NOG $= \mathfrak{A}' = 69° 55' 11'', 47$; $\mathfrak{P}' = 70° 1' 58'', 47$; $\mathfrak{P}' - \mathfrak{A}' =$ ONS $= 0° 6' 47'' = \lambda\delta$; $p\delta = 89° 53' 13''$; $\eta\delta = 62°$. Die Analogie wird $\sin. (89° 53' 13'') \sin. (89° 45' 33'', 35) : \sin. (31° 3' 49'', 82) \times \sin. (30° 56' 10'', 17) = 1 : (\sin. \frac{1}{2} \eta p \delta)^2$. Man erhält $\eta p \delta = 62° 0' 0'', 8$. Es ist demnach PNM um $0'', 8$ größer, als der gegebene Winkel BCA.

33. I. Anmerkung. Man ersieht aus diesem Beyspiele, daß die Elliptoidischen Winkel von den sphärischen zwar sehr wenig unterschieden sind, wenn der dritte Bogen durch den Mittelpunkt geht, jedoch mehr, als wenn er durch die Normale einer Station geht; und es ist gar keine Ursache, warum man diese Voraussetzung bey Ausmessungen machen sollte; sondern man ist vielmehr des Widerspiels versichert, indem die Verticallinie des Beobachters, der die Winkel mißt, niemals durch den Mittelpunkt gehen kann, denn allein bey dem Pole, und unter dem Aequator.

34. II. Anmerkung. Wollte man die Länge der Bögen VM, VN bestimmen, so hätte man in der Ellipse HMVNG die Achsen, die Winkel MOH $= \mathfrak{A}$, die Polhöhe des Punkts M in eben dieser Ellipse

lipse = P; NOG = A', die Polhöhe des N = P', und alles, was dazu erfodert wird.

35. III. Anmerkung. Wir haben in beyden Beyspielen, die wir zur VIII. Aufgabe angeführt haben, der Station M eine größere Polhöhe, als dem Punkte N gegeben, oder wir haben den sphärischen Winkel, welcher dem M entspricht, größer, denn C, genommen. Allein man sieht leicht, wenn die Polhöhe des Punkts $n = \phi'$ (8. Fig. I. Taf.), jene des M 8. Fig. I. Taf. $= \phi$, und $\phi' > \phi$, daß man eben aus k, allwo die verlängerte Normale Mk die Achse schneidet, mit nK eine Parallele ziehen könne, und die Polhöhe des Punkts bestimmen, in welchem diese Parallellinie durch den Meridian PMA geht; denn es bleiben die nämlichen Analogien, und man findet auf gleiche Art Cμ, CL; Cπ, πN ꝛc., nur daß in der Figur die Buchstaben übersetzt werden.

36. IV. Anmerkung. Es ist klar, wenn man (9. Fig. II. Taf.) die kleine Linie kl auf nk, oder 9. Fig. II. Taf. NK perpendikulär zieht, sie dem kleinen Bogen nN also nahe komme, daß sie von diesem keinen merklichen Unterschied haben könne. Nun aber ist $k\text{K} = \text{OK} - \text{O}k = \frac{a^2 - b^2}{b}\, \text{sin.}\, \varrho - \frac{(a^2 - b^2)}{b}\, \text{sin.}\, \varrho' = \frac{(a^2 - b^2)}{b} (\text{sin.}\, \varrho - \text{sin.}\, \varrho') = \frac{a^2 - b^2}{b} \times 2\, \text{sin.} (\frac{1}{2}\varrho - \frac{1}{2}\varrho')\, \text{cos.}\, (\frac{1}{2}\varrho + \frac{1}{2}\varrho')$; und es steht $1 : \text{cos.}\, \phi' = k\text{K} : kl$, mithin hat man $kl = n\text{N} = \frac{2(a^2 - b^2)}{b} \text{cos.}\, \phi' \times \text{sin.} (\frac{1}{2}\varrho - \frac{1}{2}\varrho')\, \text{cos.} (\frac{1}{2}\varrho + \frac{1}{2}\varrho')$.

Nach dieser Berechnungsart, wenn wir sie auf das oben (29) angeführte Beyspiel anwenden (obschon bey

Ausmessungen dergleichen niemals vorkommen wird), wird der Logarithmus von nN = – 1,7579104, und in Klaftern 4,2230203, welchem beynahe 16711,69 Klafter zustehen. Es ist ein Winkel dem Bogen gleich, wenn man diesen mit dem Halbmesser dividiert. Der Logarithmus von nN war — 1,7579104; der Logarithmus des Halbmessers des Berührungscirkels in n = 2,0591448; wenn wir also setzen 2,0591448. — 1,7579104 : 5,3144251. 3,0131907; so finden wir 0° 17′ 10″,8, beynahe die Differenz der Polhöhen der Punkte n und N, wie N. 29, und ist der Unterschied nur 0″,28.

36. V. Anmerkung. Allein in den Dreyecken PMN, PMn ist auch ein Unterschied in dem Winkel M, und den Bögen MN, Mn. Wenn NL auf MnL senkrecht gezogen wird, kann man das sehr kleine Dreyeck nLN als ein geradlinichtes, das auf dem Berührungsplane in n beschrieben ist, und den Winkel MNn als das Complement des nNL ansehen; daß also stehe 1 : *cos*. MNn = nN : nL, und man bekömmt nL in Theilen des Meridians, folglich in Klaftern. Es wird auch 1 : *sin*. MNn = Nn : NL; da aber NL in Theilen des Meridians, oder der Achse, den Winkel NML nicht
13. Fig. mißt, stelle man sich vor, es sey MPN (13. Fig.
II. Taf. II. Taf.) das sphäroidische Dreyeck, μMNh die Ellipse, die durch MN geht; $c\mu$ die Hälfte ihrer kleinern Achse = c; ch die Hälfte der größeren = g; die Polhöhe des M in eben dieser Ellipse = P; MK die verlängerte Normale in M; μKM = 90° — P. Nk sey die verlängerte Normale des N; P′ die Polhöhe eben dieses Punktes N; die Ordinate

$Nq = pc = c \sin. \mathfrak{R}'$; $cK = \frac{g^2 - c^2}{c} \sin. \mathfrak{R}$, folglich $pK (= \frac{g^2 - c^2}{c} \sin. \mathfrak{R} + c \sin. \mathfrak{R}') : pN$ $(= cq = g \cos. \mathfrak{R}') = 1 : tang.\, pKN$. Diesen Winkel nennen wir $= \lambda$, so wird $HKN = \mu KN - \mu KM = \lambda - (90° - \mathfrak{P})$; und es steht $\sin. \lambda : 1 = pN (= g \cos. \mathfrak{R}') : NK = \frac{g \cos. \mathfrak{R}'}{\sin. \lambda}$. Endlich lasse man auf MK aus N einen Perpendikel fallen, nämlich $N\pi$, so steht $1 : \sin. (\lambda - (90° - \mathfrak{P})) = NK$ $\left(= \frac{g \cos. \mathfrak{R}'}{\sin. \lambda}\right) : \pi N = \frac{g \cos. \mathfrak{R}' \sin. (\lambda - (90° - \mathfrak{P}))}{\sin. \lambda}$.

Wenn man nun den Plan der Ellipse μMNh um MK, als um eine Achse drehet, wird πN einen kleinen Bogen beschreiben, der unmöglich von NL, merklich unterschieden seyn kann, und man kann annehmen, daß Maaß des Winkels NML sey $N\pi L$, oder oder NL. Man setze demnach: πN in Theilen der Achse verhält sich zu NL in Theilen des Meridians, oder der Achse, welche wir schon oben gefunden haben, wie der Halbmesser auf Grade reduciert zu NL in Graden und Minuten.

Obschon in unserem Beyspiele nN nicht so klein ist, so wollen wir doch diese Correction darauf anwenden.

Es sey bca das aus dem Mittelpunkte K beschriebene sphärische Dreyeck (4. Fig. I. Taf.), nur daß hier die Buchstaben b und c der 9ten Figur II. Taf. übersetzt sind. Wir finden $cg = 25° 10' 5'', 04$; $bg = 74° 27' 9'', 73$; $ab = 51° 13' 53'', 41$; $ag = 23° 13' 16'', 32$. Für die Achsen der Ellipse 4. Fig. I. Taf.

lipse

lipse NMG wird $\mu CE = \alpha = 64^\circ\, 49'\, 54'',96$. $Log.\ sin.\ \alpha = -\ 1,9566794$. $\varrho = 64^\circ\, 55'\, 38'',91$. $Log.\ sin.\ \varrho = -\ 1,9570194$. $\varphi = 65^\circ\, 1'\, 21'',92$. $Log.\ sin.\ \varphi = -\ 1,9573561$. $Log.\ cos.\ \varrho = -\ 1,6271252$. $Log.\ C\mu = log.\ \frac{b\ sin.\ \varrho}{sin.\ \alpha} = 2,0610378$. $Log.\ CL = log.\ \frac{a\ sin.\ \varrho}{sin.\ \varphi} = 2,0622453$; $CL = 115,410504$. $Log.\ CD\ log.\ \frac{a^2 - b^2}{a}\ cos.\ \varrho = -\ 1,6261841$. $Log.\ C\pi = log.\ \frac{CD \times sin.\ \alpha}{sin.(90^\circ - (\varphi - \alpha))} = -\ 1,5828659$. $C\pi = 0,382706$. $CL + C\pi = 115,79321$. $Log. = 2,0636831$. $CL - C\pi = 115,027798$. $Log. = 2,0608028$. $Log.\ \pi G = 2,0610354 = log.\ c$. $Log.\ g = 2,0625796$.

13. Fig. II. Taf. μKN (13. Fig. II. Taf.) $= 74^\circ\, 27'\, 9'',73$. $\mathfrak{P}' = 15^\circ\, 32'\, 50'',27$. $\mathfrak{R}' = 15^\circ\, 29'\, 41'',175$. $Log.\ sin.\ \mathfrak{R}' = -\ 1,4267559$. $log.\ cos.\ \mathfrak{R}' = -\ 1,9839215$. $Log.\ Nq = log.\ pc = log.\ c\ sin.\ \mathfrak{R} = 1,4877912$. $pc = 30,7461914$. $\mathfrak{P} = 66^\circ\, 46'\, 43'',68$. $\mathfrak{R} = 66^\circ\, 42'\, 17'',62$. $Log.\ sin.\ \mathfrak{R} = -\ 1,9630698$. $Log.\ \frac{g^2 - c^2}{c} = -\ 1,9145277$. $Log.\ \frac{g^2 - c^2}{c}\ sin.\ \mathfrak{R} = log.\ cK = -\ 1,8775975$. $cK = 0,7543927$. $pK = 31,5005841$. $Log.\ pK = 1,4973186$. $Log.\ pN = log.\ g\ cos.\ \mathfrak{R}' = 2,0465011$. Analogie: $pK : pN = 1 : tang.\ pKN$ oder $tang.\ \lambda$. $\lambda = 74^\circ\, 11'\, 50'',68$. $Log.\ sin.\ \lambda = -\ 1,9832679$. Analogie $sin.\ \lambda : 1 = g\ cos.\ \mathfrak{R}' : NK$. $Log.\ NK = 2,0632432$. $90^\circ - \mathfrak{P} = 23^\circ\, 13'\, 16'',32$. $MKN = 50^\circ\, 58'\, 34'',36$. $Log.\ sin.\ MKN = -\ 1,8903565$. Analogie $1 : sin.\ MKN$

=

$= NK : N\pi$. *Log.* $N\pi = 1{,}9535897$. Aus der Analogie (9. Fig. II. Taf.) $1 : \mathit{sin.}\ MN = nN :$ 9. Fig. II. Taf.
NL wird der Logarithmus von $NL = -1{,}3997524$. Die letzte Analogie in Logarithmen wird $1{,}9535897$. $-1{,}3997524 : 5{,}3144251$. $2{,}7605878$. Dem letzten kommen $576'', 21$ zu, das ist, $9' 36'', 21$. Verlangt man die Differenz der Bögen MN, Mn, so steht $1 : \mathit{cos.}\ MNn$ $(= \mathit{sin.}\ 64^\circ) = nN : nL$, und es wird der *Log.* $nL = -1{,}7115706$ welchem beynahe 15020, 322 Klafter entsprechen. Wenn man das Dreyeck als ein sphärisches betrachtet, und die Veränderung des Winkels MNP sucht, so hat man $\mathit{tang.}\ MN$ $(= \mathit{tang.}\ (\lambda - (90^\circ - \mathfrak{P})))$ $: \mathit{sin.}\ MNP = nN\ (0^\circ 17' 10'', 8) : d.\ PNM$ $= 407'', 48 = 6' 47'', 48$.

37. VI. Anmerkung. Ich muß noch eine Anmerkung einrücken. Wir haben (8. Fig. I. Taf.) 8. Fig. I. Taf.
den Winkel, den zwey halbe Mitdurchmesser enthalten, nämlich μCL, schon oft gebraucht, und erwiesen, daß er $= 90^\circ - (\phi - \alpha)$. Man lasse aus μ auf CL einen Perpendikel μp fallen, so hat man

$$\mu p \times CL = CP \times CA, \text{ oder } \mu p \times \frac{a\ \mathit{sin.}\ \varrho}{\mathit{sin.}\ \phi} = ab.$$

Es ist aber $1 : \mathit{sin.}\ (90^\circ - \phi + \alpha) = C\mu$

$$\left(= \frac{b\ \mathit{sin.}\varrho}{\mathit{sin.}\ \alpha}\right) : \mu p, \text{ mithin } \mu p = \frac{b\ \mathit{sin.}\varrho \times \mathit{cos.}\ (\phi - \alpha)}{\mathit{sin.}\ \alpha}.$$

Dieses substituire man in der vorigen Gleichung, so

$$\text{wird } \frac{b\ \mathit{sin.}\ \varrho}{\mathit{sin.}\ \alpha} \times \mathit{cos.}\ (\phi - \alpha) \times \frac{a\ \mathit{sin.}\ \varrho}{\mathit{sin.}\ \phi} = ab,$$

$$\text{oder } \frac{(\mathit{sin.}\ \varrho)^2}{\mathit{sin.}\ \alpha \times \mathit{sin.}\ \phi} \times \mathit{cos.}\ (\phi - \alpha) = 1, \text{ folglich}$$

$$\mathit{cos.}\ (\phi - \alpha) = \frac{\mathit{sin.}\ \alpha \times \mathit{sin.}\ \phi}{(\mathit{sin.}\ \varrho)^2}.$$

Es steht auch CR $\left(\frac{a^2 - b^2}{a} \, cos. \varrho\right)$: Cπ = $sin. \mu$ Cp $\left(\frac{sin. \alpha \times sin. \varphi}{(sin. \varrho)^2}\right)$: $sin. \alpha = \frac{sin. \varphi}{(sin. \varrho)^2}$: 1, und es wird C$\pi = \frac{(a^2 - b^2) \, cos. \varrho \times (sin. \varrho)^2}{a \, sin. \varphi} = \frac{a^2 - b^2}{a} \times \frac{cos. \varrho \times sin. \alpha}{cos. (\varphi - \alpha)}$.

Wenn der Winkel PKN = PCμ gegeben ist, kann man auch NK finden. Denn man suchet erstens πN. In dem Dreyecke πCK hat man den Winkel CKπ = PCμ = $90° - \alpha'$, πCK = $180°$ − PCμ − μCL = $180° - 90° + \alpha' - (90° + \alpha' - \varphi') = 180° - 90° + \alpha' - 90° - \alpha' + \varphi' = \varphi'$; C$\pi = \frac{(a^2 - b^2) \, cos. \varrho' \cdot (sin. \varrho')^2}{a \, sin. \varphi'}$; folglich steht $sin.$ CKπ (= $cos. \alpha'$) : Cπ $\left(\frac{(a^2 - b^2) \, cos. \varrho' \, (sin. \varrho')^2}{a \, sin. \varphi'}\right)$ = $sin.$ πCK (= $sin. \varphi'$) : πK = $\frac{(a^2 - b^2) \, cos. \varrho' \, (sin \, \varrho')^2}{a \, cos. \alpha'} = \frac{(a^2 - b^2) \, cos. \varrho' \, sin. \alpha' \times sin. \varphi'}{a \, cos. \alpha' \times cos. (\varphi' - \alpha')}$; setzet man πK zu πN hinzu, so hat man NK.

38. Diese letzte Aufgabe kann zwar einen nützlichen Gebrauch haben, wenn man die Eigenschaften der sphäroidischen Winkel untersucht; aber bey wirklichen Ausmessungen, wenn die Bögen, und der Unterschied der Meridiane größer sind, wird sie wenig dienen.
14. Fig. Denn man setze, der Winkel beym Pole (14. Fig.
II. Taf. II. Taf.) P, oder die Differenz der Meridiane werde gegeben, die Winkel M und N aber genommen. Es

ist

ist klar, daß die Verticallinie des Beobachters in M durch MK gehe, und er den Winkel PMO nehme, und das sphäroidische Dreyeck wird PMON. Der Beobachter in N aber nimmt den Winkel PN*o*, indem seine Verticallinie durch *k* geht. Betrachtet man also das erste Dreyeck PMON, so muß in diesem der Winkel N kleiner, als der genommene seyn; hingegen muß in dem zweyten PM*o*N der Winkel M den genommenen übertreffen. Es wird dieses noch klärer, wenn man aus den Mittelpunkten K und *k* zwey sphärische Dreyecke $\alpha\beta\gamma$, *abc* beschreibt, aus welchen es einleuchtend wird, daß der Elliptische Bogen MON mehr gegen den Pol P, als M*o*N falle. Wollte man die genommenen Winkel M und N genau beybehalten, so würde nothwendig eine aus den Stationen M oder N verändert werden, wie es aus der angeführten Auflösung, und der 9ten Figur erhellet.

39. Vielleicht wird hier jemand gedenken, wenn man die Winkel PMN, PNM (14. Fig. II. Taf.) genommen hat, und P gegeben wird, sammt der Polhöhe des Punkts M, das sphärische Dreyeck *abc* (9. Fig. II. Taf.) würde anderst ausfallen, so fern man den Winkel *b*, und die Seite *ab* (das Complement der Polhöhe des Punkts M) sammt der Summe der Winkel *a* und *c* als gegeben annähme, und das Dreyeck nach N. 306 Geom. Sphær. auflösete. Allein man wird eben die Seiten *bc*, und *ac* bekommen, die man bekömmt, wenn man die Winkel in Sonderheit annimmt. In der 17. Figur (II. Taf.) sey BA = 33° 43′ 18″,1, ABC = 38°, BAC + BCA = 156°; so wird EAB = 24°, ABE = 142°; und man findet in dem Dreyecke EBA die Seite AE = 66° 41′ 13″,81; BE = 37° 21′

14. Fig. II. Taf.

9. Fig. II. Taf.

17. Fig. II. Taf.

$21' 7'', 93$; da $FC = EA$, wird $BC = EF - EB - FC = 180° - 37° 21' 7'', 93 - 66° 41' 13'', 81 = 75° 57' 38'', 26$. Aus den drey Winkeln haben wir $75° 57' 38'', 42$ gefunden; der Unterschied beträgt nur $0'', 16$.

4. Fig. I. Taf. 40. Das Beste, was man thuen kann, scheinet mir, daß man aus der Polhöhe einer gegebenen Station M (4. Fig. I. Taf.), dem genommenen Winkel PMN, und dem gemessenen Bogen MON, die Polhöhe der anderen Station N, so viel möglich, genau bestimme. Denn hat man diese, so findet man auch aus dem vorhergehenden den dritten Winkel N, und die Differenz der Meridiane. Man wird auch diese Station N mit einer dritten verbinden, und ein jedes sphäroidisches Dreyeck auflösen können. Ich setze aber zum voraus, man messe keinen Bogen, der mehr als 10000 Klafter hält, und wir haben schon in einer andern Absicht (N. 16) angemerkt, daß die Differenz der Tangente von $10' 13'', 45$, und des Bogens auf den Halbmesser des Krümmungscirkels bey $45°$ nur 1,9 Zolle beträgt, wenn man diesem Bogen 10000 Klafter giebt. Noch kleiner als $10' 13'', 45$ wird der Bogen, wenn man ihn nicht auf den Halbmesser des Krümmungscirkels, sondern auf $MK = \frac{a\, cos.\, \varrho}{cos.\, \varphi}$ reduciert. Denn $\frac{a\, cos.\, \varrho}{cos.\, \varphi}$ ist allezeit größer, als $\frac{a^2\, (sin.\, \varrho)^3}{b\, (sin.\, \varphi)^3}$. Um dieses zu erweisen, dividiere man beyde Größen mit $a\, cos.\, \varrho$, und multipliciere sie mit $(sin.\, \varphi)^3$, so wird $\frac{(sin.\, \varphi)^3}{cos.\, \varphi}$, und $\frac{a\, (sin.\, \varrho)^3}{b\, cos.\, \varrho}$, oder $(sin.\, \varphi)^2 \times tang.\, \varphi$, und $\frac{a}{b}.\, (sin.\, \varrho)^2 \times tang.\, \varrho$;

es

es ist aber $tang.\ \varphi = \frac{a}{b}\ tang.\ \varrho$; mithin wenn man beydes mit $tang.\ \varphi$ dividiert, bleibt auf einer Seite $(sin\ \varphi)^2$, auf der andern $(sin.\ \varrho)^2$; da aber $sin.\ \varphi > sin.\ \varrho$, wird auch $(sin.\ \varphi)^2 > (sin.\ \varrho)^2$, und verbleibt demnach $\frac{a\ cos.\ \varrho}{cos.\ \varphi} > \frac{a^2\ (sin.\ \varrho)^3}{b\ (sin.\ \varphi)^3}$. Wir wollen demnach unser Vorhaben durch folgende Aufgabe ausführen.

41. X. Aufgabe. Es wird die Polhöhe der Station M, der Winkel PMN, und die Länge des Bogens MN in Klaftern gegeben: man sucht die Polhöhe der Station N.

Auflösung. Es sey φ die Polhöhe, $\frac{b}{a}\ tang.\ \varphi = tang.\ \varrho$ für die Station M; für N aber sey die gesuchte Polhöhe $= \varphi'$, $\frac{b}{a}\ tang\ \varphi' = tang.\ \varrho'$; $Mq = a\ cos.\ \varrho$; $N\nu = a\ cos.\ \varrho'$, MK (die bis an die Achse verlängerte Normale des Meridians in M) $= \frac{a\ cos.\ \varrho}{cos.\ \varphi}$. Dieses reduciere man auf Klafter nach der Proportion, in welcher n die Zahl der Klafter ist, die in dem Halbmesser des Aequators enthalten sind, $a : n = \frac{a\ cos.\ \varrho}{cos.\ \varphi} : \frac{n\ cos.\ \varrho}{cos.\ \varphi}$. Dann setze man (wenn μ die Zahle der Klafter des Bogens MN ausdrückt) $\frac{n\ cos.\ \varrho}{cos.\ \varphi} : \mu =$ wie der Halbmesser auf Grade reduciert zu dem Bogen, der den Winkel MKN mißt.

Itzt stelle man sich ein aus dem Mittelpunkte K beschriebenes sphärisches Dreyeck acb vor, und suche ac, bc. Dann gedenke man der Meridian PMB werde um die Achse PCK gedrehet, bis er mit dem Meridiane PNA eintreffe, und M auf m, MK auf
8. Fig. mK falle. Man hat also in der 8. Fig. I. Taf.
I. Taf. MKP $= a$Kc, oder ac, und NKP $= b$Kc oder bc. Ist die Polhöhe des Punkts M $= \varphi$, jene des N $= \varphi'$, so ziehe man Cμ mit KN parallel, daß PC$\mu = bc$ werde. Man setze $90^\circ - bc = A$, $\frac{a}{b}$ *tang.* A $=$ *tang.* r, und $\frac{a}{b}$ *tang.* r $=$ *tang.* Φ, so hat man $\mu C = \frac{b \, fin. \, \varrho}{fin. \, A}$, CL $= \frac{a \, fin \, \varrho}{fin. \, \Phi}$; daraus findet man πN, und πK nach der VI. Anmerk. der vorigen Aufgabe. Endlich setze man $1 : fin. \, bc \; (= fin. \, NKP) = NK : N\nu$ (4. Fig. I. Taf.), und man hat $N\nu = a \, cof. \, \varrho'$ in Theilen der Achse. Von seinem Logarithmus nehme man den *log.* a ($=$ 2,0625820) hinweg, so bleibt *log. cos.* ϱ'', und man findet ϱ', $\frac{a}{b}$ *tang.* $\varrho'' =$ *tang.* φ', und endlich φ'. W. zu s. w.

42. I. Anmerkung. Wir haben in der V. Aufgabe (17) angenommen, es stehe $cof. \, \varrho : cof. \, \varrho' = fin. \, ac : fin. \, bc$; und dieses kann man für jenen Fall gelten lassen, in welchem MK von NK nicht merklich unterschieden ist. Dieses konnte man in dem angeführten Beyspiele mit Recht annehmen; denn da die Polhöhe von N $= 45^\circ$, und jene von M $= 45^\circ \; 5' \; 43'',8$, ist MK $=$ 115,7514666, NK $=$ 115,7511733; die Differenz bey so großen Zahlen

be-

beträgt nur 0,0002933. Allein wir wollen eben dieses Beyspiel nach gegenwärtiger Auflösung berechnen, und sehen, was für ein Unterschied sich zeige. Nur ist zu bemerken, daß α, ϱ, φ für N; α', ϱ' und φ' für M gehöre.

43. Beyspiel. Es sey die gegebene Polhöhe des Punkts N $= 45°$, $log.\ cos.\ \varrho = -\ 1{,}8504251$; $log.\ cos.\ \varphi = -\ 1{,}8494850$. $Log.\ Nk = log.\ \frac{a\ cos.\ \varrho}{cos.\ \varphi} = 2{,}0635221$. $Log.\ Nk$ auf Klafter reduciert $= 6{,}5286320$; der Bogen ba nach dem Halbmesser Nk auf Grade reduciert $= 10'\ 10'',65$. $ac = 44°\ 54'\ 19'',14$; $bca = 0°\ 8'\ 39'',97$.

Es ist demnach in der 8. Figur $PKN = 45°$, 8. Fig. I. Taf.
$PKM = 44°\ 54'\ 19'',14 = PC\mu$; $90° - ac = 45°\ 5'\ 40'',86 = A$. $Log.\ sin.\ A = -\ 1{,}8502015$. $r = 45°\ 13'\ 8'',29$; $log.\ sin.\ r = -\ 1{,}8511384$. $Log.\ cos.\ r = -\ 1{,}8478189$. $\Phi = 45°\ 20'\ 35'',72$. $Log.\ sin.\ \Phi = -\ 1{,}8520713$. $log.\ cos.\ A = -\ 1{,}8487661$. $C\pi = \frac{(a^2 - b^2)\ cos.\ r\ (sin.\ r)^2}{a\ sin.\ \Phi} = 0{,}4978325$. $Log.\ \pi K = log.\ \frac{(a^2 - b^2)\ cos.\ r\ (sin.\ r)^2}{a\ cos.\ A} = -\ 1{,}7005117$. $\pi K = 0{,}5017780$. $Log.\ C\mu = log.\ \frac{b\ sin.\ r}{sin.\ A} = 2{,}0616347$. $Log.\ CL = log.\ \frac{a\ sin.\ \varrho}{sin.\ \Phi} = 2{,}0616491$.

$CL = 115{,}252175$. $CL + C\pi = 115{,}750007$. $Log. = 2{,}0635210$. $CL - C\pi = 114{,}754343$. $Log.\ 2{,}0597691$. $Log.\ \pi M = 2{,}0616306$. $\pi M = 115{,}247268$; $KM = 115{,}749046$. $Log.\ KM = 2{,}0635174$. Aus der Analogie $1 : sin.\ ca$

 =

$= KM : a\ cos.\ \varrho'$, finde ich $log.\ cos.\ \varrho' = -$ 1,8497015, welchem $45° 1' 42'', 89$ zustehen, und $\varrho' = 44° 58' 17'', 11$; $\varphi' = 45° 5' 44'', 53$. Die Differenz von $45° 5' 43'', 8$ ist $0'', 73$.

44. II. Anmerkung. Wollte man aus dem Bogen $NM = 10' 10'', 65$ die Anzahl der entsprechenden Klafter suchen, so müßte man ihn nicht nach dem Halbmesser $\frac{a^2 (sin.\ \varrho)^2}{b (sin.\ \varphi)^3}$ berechnen, sondern nach dem Halbmesser $\frac{a\ cos.\ \varrho}{cos.\ \varphi}$. Denn die angenommene Zahle 10000 würde auch für den Halbmesser $\frac{a^2 (sin.\ \varrho)^2}{b (sin.\ \varphi)^3}$ einen größeren Bogen, nämlich $10' 13'', 45$, als für $\frac{a\ cos.\ \varrho}{cos.\ \varphi}$ gegeben haben. Allein die Aufgabe hatte eine ganz andere Absicht, nämlich aus der gegebenen Polhöhe einer Station, aus dem gegebenen Winkel, und in Klaftern gleichfalls gegebenen Bogen MN die Polhöhe der anderen Station zu bestimmen. Man ersieht aber auch, daß die Auflösung nicht allein für den Fall diene, da man eine Grundlinie mißt, die nur gar selten 10000 Klafter erreichen wird, sondern auch wenn man Dreyecke berechnet, in welchen die Seiten 30000 Klafter enthalten. Denn wenn die Polhöhe 48°, geben 30000 Klafter für den Halbmesser $\frac{a\ cos.\ \varrho}{cos.\ \varphi}$ $30' 31'', 54$, und die Tangente dieses Bogens übertrifft den Bogen nur um 0,8263, welches 4 Schuhe 10,5 Zolle beträgt. Diese Größe leidet noch immer eine hinlängliche Correction des Azimuths ꝛc. Und dieses giebt den Grund der Auflösung folgender......

45. XI Aufgabe. Es werden die Polhöhe der Station M (15. Fig. II. Taf.), der Winkel PMN, die Seite NM in Klaftern, sammt den Winkeln NMO, MNO gegeben; man sucht die übrigen Theile des Dreyecks NMO; doch vorausgesetzt, daß die Seiten nicht viel über 30000 Klafter betragen. 15. Fig. II. Taf.

Auflösung. 1. Man suche nach der X. Aufgabe die Polhöhe der Station N. Man findet zugleich in dem sphärischen Dreyecke *cab* (4. Fig. I. Taf.) den Winkel *cba*, oder in der 15. Fig. PNM, welcher dem sphärischen *bca* in der 4ten gleich ist. In dem auch MNO gegeben ist, hat man PNO = PNM + MNO.

2. Itzt stelle man sich vor, es schneiden alle drey Plane der Bögen NM, MO, NO die verlängerte Achse der Elliptoide in dem Punkte, in welchem die Normale des Meridians in M sie schneidet; so kann man sich ein sphärisches Dreyeck einbilden, dessen Mittelpunkt eben alldort ist; und da man schon die Seite MN auf Grade reduciert hat, auch die Winkel NMO, MNO gegeben sind, findet man die Seite NO in Graden und Minuten. Es ist klar, daß man auf diese Weise die Polhöhe des Punkts N, den Winkel PNO, und die Seite NO hat, und man wird wiederum nach der vorhergehenden Aufgabe die Polhöhe des Punkts O, den Winkel NOP, folglich auch MOP, finden.

3. Indem ein sphärisches Dreyeck nach allen seinen Theilen bestimmt ist, wenn zwey Winkel, und die entzwischen liegende Seite gegeben wird, kann entweder der Punkt O nicht eine Station seyn, die etwa die Spitzen des Dreyecks NMO machen, wie wir (38) angemerkt haben, oder die Winkel müssen corrigiert

rigiert werden. Diese Correction aber würde unnütz seyn, wenn man die wahre Entfernung einer Station von der andern suchte. Daher muß man, nachdem die Polhöhen M, N, und O bekannt sind, nach der III Aufgabe (9) den kürzesten Bogen von M zu N, von M zu O, und von N zu O suchen, und dann können die Winkel verbessert werden. Denn man wird für einen jeden Bogen einen Punkt, und desselben Polhöhe finden, durch dessen Normale der Schnitt gehen muß; und da man auch aus den Polhöhen der Punkte M und N (zum Beyspiele) jene Punkte der Achse weis, in welchen ihre Normalen an selbe stoffen, hat man alles, was zur Auflösung der VIII Aufgabe (24) erfodert wird. W. zu f. w.

46. Obschon die Berechnung eines einzigen Dreyecks ungemein beschwerlich fallen muß, so ersieht man doch aus der Methode, wie man mehrere Dreyecke mit einander verbinden könne, wenn die Polhöhe einer aus den Stationen, und eine Seite sammt zweyen Winkeln gegeben wird.

Wären nebst der Polhöhe des Punkts M die Winkel PMN, PMO, PNO, und die Seite MN gegeben, so hätte man auch den Winkel NMO $= 360^\circ - PMN - PMO$, und da man in dem Dreyecke PNM den Winkel PNM fände, wären wiederum in dem Dreyecke NMO die Seite MN, und die Winkel NMO, MNO bekannt.

Eben so wenn PNM, PNO, NPM, und die Seite NO nebst der Polhöhe der Station M gegeben wären, fände man in dem Dreyecke PNM aus PM, PMN und MPN die Seiten NM, PN, und den Winkel PNM; dann hätte man in dem Dreyecke NMO die Seiten NM, NO, und den erhaltenen Winkel ꝛc.

47.

47. Wenn man mehr Dreyecke hätte, zum Beyspiele MNO (16. Fig. II. Taf.), ONQ, QOR, könnte man die am meisten entfernten Stationen durch einen kürzesten Bogen verbinden, und den wahren Abstand auf der Oberfläche der Elliptoide finden, indem die Polhöhen M und R, wie auch MPR = MPO + OPR, daß ist, die Differenz der Meridiane schon bekannt wären. 16. Fig. II. Taf.

Wollte man endlich eine Station O auf den Meridian, der durch M geht, reducieren, so müßte man sich auf der anderen Seite einen mit MPO gleichen Winkel MPV vorstellen, und der Station V eine mit O gleiche Polhöhe geben, und nach der XI. Aufgabe (Abhandl. über eine Methode ꝛc. § I. 27. Seite) und III. Anmerk. (36) zwischen V und O den kürzesten Bogen suchen, welcher auf den Meridian PM in X senkrecht stehen würde. Eben also könnte man R auf eben diesen Meridian reducieren, wenn man MPR = MPS nähme. In dem rechtwinklichten Dreyecke XPO wäre die Seite PO, und der Winkel XPO bekannt, und würde daraus XP gefunden, gleichwie auch in dem Dreyecke TPR aus TPR und PR die Seite TP. Der Unterschied zwischen XT und der Differenz der Polhöhen der Punkte O und R würde die Correction wegen der Convergenz der Meridiane geben. Doch in unserer Methode wäre diese unnütz, da schon die Polhöhen aller Stationen O, N, Q, R und M bekannt wären.

48. Allein wie wäre es, wenn (2. Fig. Nr. I. I. Taf.) der Bogen NM nicht gemessen wäre (denn dazumal würde er schwerlich 10000 Klafter betragen) sondern wenn man nur die schiefe Linie NI aus der Berechnung eines Dreyeckes, wie auch den Winkel 2. Fig. Nr. I. I. Taf.

TNI

TNI bey größeren Ausmessungen gefunden hätte. Es kann in dergleichen Fällen NI auch wohl über 30000 Klafter enthalten. Wie sollte man hier die Station M finden? Man verlängere den Plan des Dreyeckes
2. Fig. N. 2. I. Taf. NIH, bis er durch k gehe, wie dieses 2. Fig. N. 2. I. Taf. vorgestellt wird, und lasse aus I einen Perpendikel IQ auf NH fallen. Der Winkel, unter welchem der Beobachter in N die Höhe IH über seinen scheinbaren Horizon sieht, sey $= \varepsilon$, NI $= m$; so wird IQ $= m \times sin. \varepsilon$, NQ $= m \times cos. \varepsilon$. Man verlängere kN, und ziehe Ib mit NQ parallel, so steht $kb \left(= m \times sin. \varepsilon + \frac{a\ cos. \varrho}{cos. \varphi}\right)$ $: b\mathrm{I} (= \mathrm{NQ} = m\ cos. \varepsilon) = k\mathrm{N} \left(= \frac{a\ cos. \varrho}{cos. \varphi}\right)$ $: \mathrm{NH} = \frac{m a\ cos. \varrho\ cos. \varepsilon}{m\ sin. \varepsilon\ cos. \varphi + a\ cos. \varrho}$.

49. Was den genommenen Winkel INT betrifft, muß dieser auf den scheinbaren Horizon des Beobachters in N reduciert werden. Es kann dieses
2. Fig. N. I. I. Taf. auf folgende Weise geschehen, daß man sich (2. Fig. N. I. I. Taf.) ein bey k rechtwinklichtes Dreyeck $ih\mathfrak{d}$ vorstelle, und setze: $cos. ih : 1 = cos. \mathfrak{d}i : cos. \mathfrak{d}h$. Wenn man diesen Winkel hat, und die Linie NH,
6. Fig. I. Taf. und läßt (6. Fig. I. Taf.) auf TN den Perpendikel HD fallen, findet man aus HN, und DNH so wohl DN, als DH; aus der bekannten Polhöhe des N findet man die Tangente NT, DT (= NT — DN), und in dem rechtwinklichten Dreyecke TDH den Winkel DTH, und TH. Man kann annehmen, es sey TN = TO. Ob diese Voraussetzung richtig, oder nicht, wird sich hernach zeigen. Man hat

hat auch HNO = 90° — ½ NTO, HO, und NHO, daraus findet man NO. In der 2. Fig. N. 1. I. Taf. findet man aus NO, und Nk den Winkel NkO, und NOk; dann die halbe Senne NG, und den Winkel NpG = NPM. In eben dem Dreyecke ONk findet man OG; und wenn man den Winkel GTO sucht, wird man sehen, ob in der That TO = TN anzunehmen sey. Um die Vertiefung LM oder HM zu finden, ist es genug, wenn man die Polhöhe des M beynahe hat. Daher setze man Nk : NH = 1 : *tang. arc.* NM; und in 5. Fig. hat man ba, cb, und den erhaltenen Winkel b, aus dem man ac sucht, welches nur sehr wenig von PKM (2. Fig. N. 1.) abweicht. Dann sucht man Tt, Tn, und setzet 1 : *cos.* nTO = TH : Tm, und man hat Tn — Tm = ML, MH. Man setze *sin.* PTO : *sin.* PTN = 1 : *sin.* $\beta\alpha\gamma$. In dem sphärischen Dreyecke $\beta\alpha\gamma$ sucht man aus dem Winkel α und den Seiten $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$ den Winkel β, und $\beta\gamma$ = NLM = NIL + INL, und man hat auch NIL, welcher von NIH gar selten unterschieden ist. Aus diesen sucht man (6. Fig.) HL, HR; Rr, rH, das ist, so wohl die Correction des Winkels TNH, als der Linie NH. Nachdem dieses geschehen, setzet man vom Neuen Nk : NR = 1 : *tang. arc.* NM, und sucht (5. Fig.) ac; dann MK; und die Analogie 1 : *sin.* ac = MK : Mπ = a *cos.* ϱ', giebt endlich ϱ', und φ', oder die Polhöhe des Punkts M. 2. Fig. N. 1. I. Taf.

50. Wenn zwey Stationen G und μ auf dem nämlichen Meridiane lägen (7. Fig. I. Taf.) und man die Linie iG gäbe, wäre es zwar nicht möglich in dem Azimuthalwinkel zu fehlen, jedoch müßte man 7. Fig. I. Taf.

aus

aus iG, und dem gegebenen Winkel iGh erstens hG, und zweytens LG suchen. Wenn $iG = m$, $iGh = \varepsilon$, würde $ih = Gb = m \sin. \varepsilon$, $hG = m \cos. \varepsilon$; anstatt Gh könnte man den Halbmesser des Krümmungscirkels in G, nämlich $fG = \frac{a^2 (\sin. \varrho)^3}{b (\sin. \varphi)^3}$, nehmen, und es stünde $fb \left(m \sin. \varepsilon + \frac{a^2 (\sin. \varrho)^3}{b (\sin. \varphi)^3} \right) : m \cos. \varepsilon = \frac{a^2 (\sin \varrho)^3}{b (\sin. \varphi)^3} : GL = \frac{m \cos. \varepsilon \times a^2 (\sin. \varrho)^3}{m b \sin. \varepsilon (\sin. \varphi)^3 + a^2 (\sin. \varrho)^3}$.

51. Ich weis gar wohl, daß diese Berechnung nur jener auf sich nehmen werde, dessen Geduld durch keine Weitläuftigkeit kann erschüttert werden. Wollte ich diese Messungsart den Feldmessern aufdringen, so wäre es ja himmelweit gefehlt; da ich mir aber vorgenommen habe, einen Elementärweg zu zeigen, wie man auf der Oberfläche unserer Elliptoide die meisten trigonometrischen Operationen anstellen könne, so glaube ich mein Absehen erreicht zu haben.

Anhang
über
die Quadratur der Oberfläche einer Elliptoide
auf Logarithmen und Sinus reduciert.

Die Formeln, derer wir uns bisher bedient, und welche Sinus, und Cosinus der Winkel ϱ, α und φ enthalten, lassen sich auch auf andere reducieren, in welchen allein die *sin.* φ und *cos.* φ zu finden sind; denn da wir $\frac{b}{a}\, tang.\, \varphi = tang.\, \varrho$, oder

$$\frac{\frac{b}{a}\, sin.\, \varphi}{cos.\, \varphi} = \frac{sin.\, \varrho}{cos.\, \varrho}$$

gefunden, ist auch

$$\frac{sin.\, \varrho}{\sqrt{1 - sin.^2\, \varrho}} = \frac{\frac{b}{a}\, sin.\, \varphi}{\sqrt{1 - sin.^2\, \varphi}},$$

und

$$\frac{sin.^2\, \varrho}{1 - sin.^2\, \varrho} = \frac{\frac{b^2}{a^2}\, sin.^2\, \varphi}{1 - sin.^2\, \varphi};$$

wenn man die Brüche aufhebt, wird $sin.^2\, \varrho - sin.^2\, \varrho\; sin.\, \varphi$

$$= \frac{b^2}{a^2}\, sin.^2\, \varphi - \frac{b^2}{a^2}\, sin.^2\, \varrho\; sin.^2\, \varphi;$$

$$sin.^2\, \varrho - sin.^2\, \varrho\; sin.^2\, \varphi + \frac{b^2}{a^2}\, sin.^2\, \varphi\; sin.^2\, \varrho = \frac{b^2}{a^2}\, sin.^2\, \varphi;$$

$$sin.^2\, \varrho \left(1 - sin.^2\, \varphi + \frac{b^2}{a^2}\, sin.^2\, \varphi \right) = sin.^2\, \varrho \left(1 - \frac{(a^2 - b^2)}{a^2}\, sin.^2 \varphi \right) = \frac{b^2\, sin.^2\, \varphi}{a^2}$$

sin:

$$\sin. \varrho = \frac{\frac{b}{a} \sin. \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) \sin.^2 \varphi}};$$

$$\cos. \varrho = \frac{\cos. \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) \sin.^2 \varphi}}$$

$$\sin. \alpha = \frac{\frac{b^2}{a^2} \sin. \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{a^4 - b^4}{a^4}\right) \sin.^2 \varphi}};$$

$$\cos. \alpha = \frac{\cos. \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{a^4 - b^4}{a^4}\right) \sin.^2 \varphi}}.$$

Wir wollen hier weiter keinen anderen Gebrauch machen, als daß wir sie auf die Quadratur der Oberfläche einer bey dem Pole zusammengedrückten Elliptoide anwenden. In den Supplementen zu den 6 Bänden meines Vorlesebuchs habe ich (73. Seite) gewiesen, daß man ein Element des Meridians durch $a d\varrho \times \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) \cos.^2 \varrho}$ ausdrücken könne. Es wird $d. \sin. \varrho = d\varrho \cos. \varrho = \frac{\frac{b}{a} d\varphi \cos. \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) \sin.^2 \varphi}}$

+

$$+\frac{\frac{b}{a}\,\mathit{fin}.\,\varphi\times\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)d\varphi\,\mathit{cof}.\,\varphi\,\mathit{fin}.\,\varphi}{\left(1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\mathit{fin}.^2\varphi\right)^3}=$$

$$\frac{\frac{b}{a}\,d\varphi\,\mathit{cof}.\,\varphi\left(1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\mathit{fin}.^2\varphi\right)+}{\left(1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\mathit{fin}.^2\varphi\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\frac{b}{a}\,\mathit{fin}.\,\varphi\times\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\mathit{fin}.\,\varphi\,\mathit{cof}.\,\varphi\,d\varphi}{\left(1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\mathit{fin}.^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$\frac{\frac{b}{a}\,d\varphi\,\mathit{cof}.\,\varphi}{\left(1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\mathit{fin}.^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}$$; alles mit $\mathit{cof}.\,\varrho$ divi-

diert giebt $d\varrho=\frac{\frac{b}{a}\,d\varphi\,\mathit{cof}.\,\varphi}{\left(1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\mathit{fin}.^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}\times$

$$\frac{\sqrt{1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\mathit{fin}.^2\varphi}}{\mathit{cof}.\,\varphi}=\frac{\frac{b}{a}\,d\varphi}{1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\mathit{fin}.^2\varphi};$$

$$a\,d\varrho\sqrt{1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\mathit{cof}.^2\varrho}=\frac{b\,d\varrho}{1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\mathit{fin}.^2\varphi}\times$$

$$\sqrt{\left(\frac{1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\cos.^2\varphi}{1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\sin.^2\varphi}\right)}=\frac{b\,d\varphi}{1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\sin.^2\varphi}\times$$

$$\sqrt{\frac{1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\sin.^2\varphi-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\cos.^2\varphi}{1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\sin.^2\varphi}}=$$

$$\frac{b\,d\varphi}{1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\sin.^2\varphi}=\sqrt{\frac{1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)}{1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\sin.^2\varphi}}$$

$$=\frac{\frac{b^2}{a}\,d\varphi}{\left(1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\sin.^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}.$$ Wenn $r:c$ das Verhältniß des Halbmessers des Cirkels zu dem Umkreise ausdrücket, so wird der Umkreis, durch welchen das Element des Meridians multipliciert muß werden, damit man ein Element der Oberfläche erhalte, =

$$\frac{a\,c\,\cos.\varphi}{r\sqrt{1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\sin.^2\varphi}},$$ folglich wird dieses Element

ment der Oberfläche $= \dfrac{\frac{b^2c}{r}\, d\phi \cos.\phi}{\left(1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\sin.^2\phi\right)^{\frac{4}{2}}} =$

$$\frac{\frac{b^2c}{r}\, d\phi \cos.\phi}{\left(1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\sin.^2\phi\right)^2}.$$

Es ist einleuchtend, daß $d\phi \cos.\phi = d.\sin.\phi$; setzen wir um $a^2 - b^2 = e^2$, und $\frac{e}{a}\sin.\phi = x$, $d.\sin.\phi = d\phi \cos.\phi = \frac{a}{e}dx$, so haben wir $\dfrac{\frac{ab^2c}{er}\,dx}{(1-x^2)^2}$ eine Rationalfraction.

Es ist $(1-x^2)^2 = (1+x)^2(1-x)^2$, mithin können wir unterdessen die beständige Größe $\frac{ab^2c}{er}$ hinweglassen, und setzen $L.\, \frac{1}{(1+x)^2(1-x)^2} = \frac{Ax+B}{(1+x)^2} + \frac{Cx+D}{(1-x)^2}$.

Aus dieser Gleichung finde ich $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{4}$, $D = \frac{1}{2}$. Wenn ich diese Werthe gebrauche, wird $\dfrac{\frac{xdx}{4} + \frac{1}{2}dx}{1+2x+x^2} - \dfrac{\frac{xdx}{4} + \frac{1}{2}dx}{1-2x+xx}$, und

$\left(\frac{xdx}{4}\right.$

$$\frac{\left(\frac{x\,dx}{4}+\frac{dx}{2}\right)\left(1-2x+xx\right)+\left(-\frac{x\,dx}{4}+\frac{1}{2}dx\right)\left(1+2x+xx\right)}{(1+x)^2\times(1-x)^2}=$$

$$\frac{dx}{(1+x)^2(1-x)^2}.$$ Um $\frac{\frac{xdx}{4}+\frac{dx}{2}}{(1+x)^2}$ und $\frac{-\frac{xdx}{4}+\frac{dx}{2}}{(1-x)^2}$ zu integrieren, setze ich $1+x=v$, $x^2=v^2-2v+1$, $\frac{xdx}{4}=\frac{vdv-dv}{4}$, $\frac{dx}{2}=\frac{dv}{2}=\frac{2dv}{4}$; und $\frac{xdx}{4}+\frac{dx}{2}=\frac{vdv}{4}-\frac{dv}{4}+\frac{2dv}{4}=\frac{vdv+dv}{4}$; $\frac{\frac{1}{4}xdx+\frac{dx}{2}}{(1+x)^2}$ $=\frac{vdv}{4v^2}+\frac{dv}{4v^2}=\frac{dv}{4v}+\frac{dv}{4v^2}$; das Integral wird $\frac{1}{4}\,log.\,v-\frac{1}{4v}=\frac{1}{4}\,log.\,(1+x)-\frac{1}{4(1+x)}$; wenn man dieses differenziert, so bekömmt man $\frac{\frac{1}{4}dx}{1+x}+\frac{\frac{1}{4}dx}{(1+x)^2}=\frac{\frac{1}{4}dx+\frac{1}{4}xdx+\frac{1}{4}dx}{(1+x)^2}=$ $\frac{\frac{1}{4}xdx+\frac{1}{2}dx}{(1+x)^2}$. Durch eine gleiche Substitution $1-x=v$, wird $\int\frac{-\frac{1}{4}xdx+\frac{dx}{2}}{(1-x)^2}=-\frac{1}{4}\,log.(1-x)$ $+\frac{1}{4(1-x)}$, mithin wird das ganze *Log.* $\frac{(1+x)^{\frac{1}{4}}}{(1-x)^{\frac{1}{4}}}$

—

$$-\frac{1}{4(1+x)}+\frac{1}{4(1-x)}=Log.\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}}+$$

$\frac{x}{2(1-x^2)}$, mit der beständigen Größe $\frac{ab^2c}{er}$ aber

$$Log.\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{ab^2c}{4er}}+\frac{\frac{ab^2cx}{er}}{2(1-x)^2}=Log.$$

$$\left(\frac{1+\frac{e}{a}\,\sin.\varphi}{1-\frac{e}{a}\,\sin.\varphi}\right)^{\frac{ab^2c}{4er}}+\frac{\frac{b^2c}{r}\,\sin.\varphi}{2\left(1-\frac{e^2}{a^2}\sin.^2\varphi\right)},\text{ oder}$$

$$h\left(\frac{1+\frac{e}{a}\,\sin.\varphi}{1-\frac{e}{a}\,\sin.\varphi}\right)^{\frac{ab^2c}{4er}}+\frac{\frac{b^2c}{r}\,\sin.\varphi}{2\left(1-\frac{e^2}{a^2}\sin.^2\varphi\right)}.$$

Für die Hälfte der Elliptoide wird $\sin.\varphi=1$, und für die ganze bekömmt man $2h\left(\frac{1+\frac{e}{a}}{1-\frac{e}{a}}\right)^{\frac{ab^2c}{4er}}+\frac{\frac{b^2c}{r}}{1-\frac{e^2}{a^2}}$.

Wenn man lieber eine unendliche Reihe haben will, so wird diese sehr bequem, nämlich $\frac{b^2c}{r}\Big(d\varphi\cos.\varphi+\frac{2e^2d\varphi\cos.\varphi\sin.^2\varphi}{a^2}+\frac{3e^4d\varphi\cos.\varphi\sin.^4\varphi}{a^4}+$

$4e^6$

$\frac{4e^6 d\varphi \cos.\varphi \sin.^6\varphi}{a^6}$ + &c.); da aber $d\varphi \cos.\varphi = d \sin.\varphi$, ist das Integrale leicht zu finden, und man bekömmt $\frac{b^2c}{r}\left(\sin.\varphi + \frac{2}{3}\frac{e^2 \sin.^3\varphi}{a^2} + \frac{3}{5}\frac{e^4 \sin.^5\varphi}{a^4} + \frac{4}{7}\frac{e^6 \sin.^7\varphi}{a^6} + \frac{5}{9}\frac{e^8 \sin.^9\varphi}{a^8} + \frac{6}{11}\frac{e^{10} \sin.^{11}\varphi}{a^{10}} + \text{&c.}\right)$; Für die Hälfte der Elliptoide (vom Aequator bis zum Pole) wird $\frac{b^2c}{r}\left(1 + \frac{2}{3}\frac{e^2}{a^2} + \frac{3}{5}\frac{e^4}{a^4} + \frac{4}{7}\frac{e^6}{a^6} + \frac{5}{9}\frac{e^8}{a^8} + \frac{6}{11}\frac{e^{10}}{a^{10}} + \frac{7}{13}\frac{e^{12}}{a^{12}} + \text{&c.}\right)$; und für die ganze $\frac{b^2c}{r} \times \left(2 + \frac{4}{3}\frac{e^2}{a^2} + \frac{6}{5}\frac{e^4}{a^4} + \frac{8}{7}\frac{e^6}{a^6} + \frac{10}{9}\frac{e^8}{a^8} + \frac{12}{11}\frac{e^{10}}{a^{10}} + \frac{14}{13}\frac{e^{12}}{a^{12}} + \text{&c.}\right)$. Wenn $\frac{e}{a}$ sehr klein, wie bey unserer Erde nach dem Verhältnisse der Achsen 230 : 231, und man bis auf $\frac{e^{12}}{a^{12}}$ geht, wird $\frac{14}{13}\frac{b^2c\,e^{12}}{r\,a^{12}}$ ein Bruch von Quadratklaftern, dessen Zähler = 706706, der Nenner aber 1 mit 53 angehängten Nullen ist. In dieser Voraussetzung geben die ersten fünf Glieder für die Oberfläche der Erde 9314912,766 Quadratmeilen, die Länge einer Meile zu 3909,13 Wiener Klafter gerechnet, so weit man sich nämlich auf die Rechnung mit gewöhnlichen Logarithmen von 7 Decimalzahlen verlassen kann.

Wenn man eine bey dem Pole verlängerte Elliptoide hat, muß das Element des Meridians mit $\frac{bc}{r}\sin.\varrho$ multiplicieret werden; und in diesem Falle

ist

ist die Formel $\frac{abc}{r}\, d\varrho \sin.\varrho \sqrt{1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\cos.^2\varrho}$ bequemer. Denn man setze $1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\cos.^2\varrho =$ $\sin.^2\lambda$, $\sqrt{1-\sin.^2\lambda} = \cos.\lambda = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cos.\varrho$, $\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\cos.\lambda = \cos.\varrho$, $\frac{-a}{\sqrt{a^2-b^2}}\, d\lambda \sin.\lambda =$ $-d\varrho \sin.\varrho$, so wird das Differenzial $= \frac{a^2bc\, d.\lambda \sin.\lambda}{r\sqrt{a^2-b^2}} \times$ $\sin.\lambda = \frac{a^2bc\, d.\lambda (\sin.\lambda)^2}{r\sqrt{a^2-b^2}}$, $\int\frac{a^2bc\, d.\lambda (\sin.^2\lambda)}{r\sqrt{a^2-d^2}} =$ $-\frac{a^2bc\cos.\lambda \sin.\lambda}{2r\sqrt{a^2-b^2}} + \frac{a^2bc\lambda}{2r\sqrt{a^2-b^2}}$. Wenn die größere Achse = 231, die kleinere = 230, so finde ich für die Oberfläche der Elliptoide 9290782,9787 Quadratmeilen beynahe.

Wenn man in der Voraussetzung, daß der Plan 12. Fig.
des Bogens HMNG durch den Mittelpunkt der II. Taf.
Sphäroide geht, den Bogen HD des Aequators x nennet, wird ein Element des Umkreises eines unbestimmten Parallelcirkels $= \frac{dx\cos.\varphi}{\sqrt{1-\frac{e^2}{a^2}\sin.^2\varphi}}$, und ein Element der zweyten Ordnung des Dreyeckes HMD,

das

das zwischen zweyen unendlich nahen Meridianen ent-

halten wird, $\dfrac{\frac{ab^2}{ae}\,dx\,d\varphi\,\cos.\varphi}{\left(1-\frac{e^2}{a^2}\sin.^2\varphi\right)^2}$.

Es ist klar, daß bey der ersten Integration dx als eine beständige Größe anzusehen, und wird dem-

nach $dx\displaystyle\int\dfrac{\frac{b^2}{e}\,d\varphi\,\cos.\varphi}{\left(1-\frac{e^2}{a^2}\sin.^2\varphi\right)^2}$. Es darf keine beständige Größe hinzu gesetzt werden; denn bey H wird $\sin.\varphi = 0$. Für das Dreyeck HMD, muß x anstatt dx,

oder wenn der Bogen HD $= g$, $g\displaystyle\int\dfrac{\frac{b^2}{e}\,d\varphi\,\cos.\varphi}{\left(1-\frac{e^2}{a^2}\sin.^2\varphi\right)^2}$

gesetzt werden. Zieht man dieses von $h\left(\dfrac{1+\frac{e}{a}}{1-\frac{e}{a}}\right)^{\frac{b^2g}{4e}}$ +

$\dfrac{\frac{b^2eg}{a}}{2\left(1-\frac{e^2}{a^2}\right)}$ ab, so hat man den Raum des Dreyeckes HPM. Die Oberfläche der Spalte HMNGEDH findet man, wenn $g = \dfrac{ac}{2r}$, und $\sin.\varphi$ der Polhöhe des mittleren Punkts des Bogens HMNG entspricht; und wenn man diese von $\frac{1}{4}$ der Oberfläche der ganzen El-

liptoide

liptoide abzieht, bleibt der Innhalt der anderen Spalte HMNGPH; von dieser kann man wieder die Dreyecke HPM, GPN hinweg nehmen, und man erhält die Oberfläche des Dreyeckes MPN, welches man auch noch auf eine andere Art finden kann. Allein es läßt sich dieser Stof vielleicht bey einer anderen Gelegenheit behandeln, auch in der Voraussetzung, daß der Plan des Bogens HMNG nicht durch den Mittelpunkt der Elliptoide geht. Für diesesmal will ich nur anmerken, daß wenn wir den Winkel, welchen in der Parabel die Normale mit der Achse macht, φ nennen, $y = \frac{p\, tang.\, \varphi}{2}$ werde, folglich $dy = \frac{p\, d\varphi}{2(cos.\varphi)^2} = \frac{p\, d\varphi\, cos.\, \varphi}{2(cos\, \varphi)^3}$; $x = \frac{y^2}{p} = \frac{p\, tang.^2\, \varphi}{4}$, $dx = \frac{2\, p\, d\varphi\, tang\, \varphi}{4\, (cos\, \varphi)^2} = \frac{p\, d\varphi\, sin.\, \varphi}{2\, (cos.\, \varphi)^3}$ $dx^2 + dy^2 = \frac{p^2 d\varphi^2\, (cos.\, \varphi)^2 + p^2 d\varphi^2\, (sin\, \varphi)^2}{4\, (cos.\, \varphi)^6} = \frac{p^2 d\varphi^2}{4\, (cos.\, \varphi)^6}$; $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{p\, d\varphi}{2\, (cos.\varphi)^3}$; $\int \frac{p\, d\varphi}{2\, (cos.\varphi)^3} = \frac{1}{4} p \frac{(sin.\, \varphi)}{(cos.\varphi)^2} + \frac{1}{4} p \int \frac{d\varphi}{cos.\, \varphi} = \frac{p}{4}\, \frac{sin.\, \varphi}{(cos.\varphi)^2} + \frac{p}{4}\, Log.\, tang.\, (45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) = \frac{p\, sin\, \varphi}{4\, (cos.\varphi)^2} +_h \frac{p}{4} (tang.\, (45^\circ + \frac{1}{2}\varphi))$.

Die Oberfläche einer Paraboloide wird $= - \frac{1}{12}\, \frac{c\, p^2}{r} + \frac{1}{12}\, \frac{c\, p^2}{r\, (cos.\varphi)^3} = \frac{c\, p^2}{12\, r} \times ((sec.\, \varphi)^3 - 1) = \frac{c\, p^2}{12\, r} \left(\frac{1 - (cos.\, \varphi)^3}{(cos.\, \varphi)^3} \right)$.

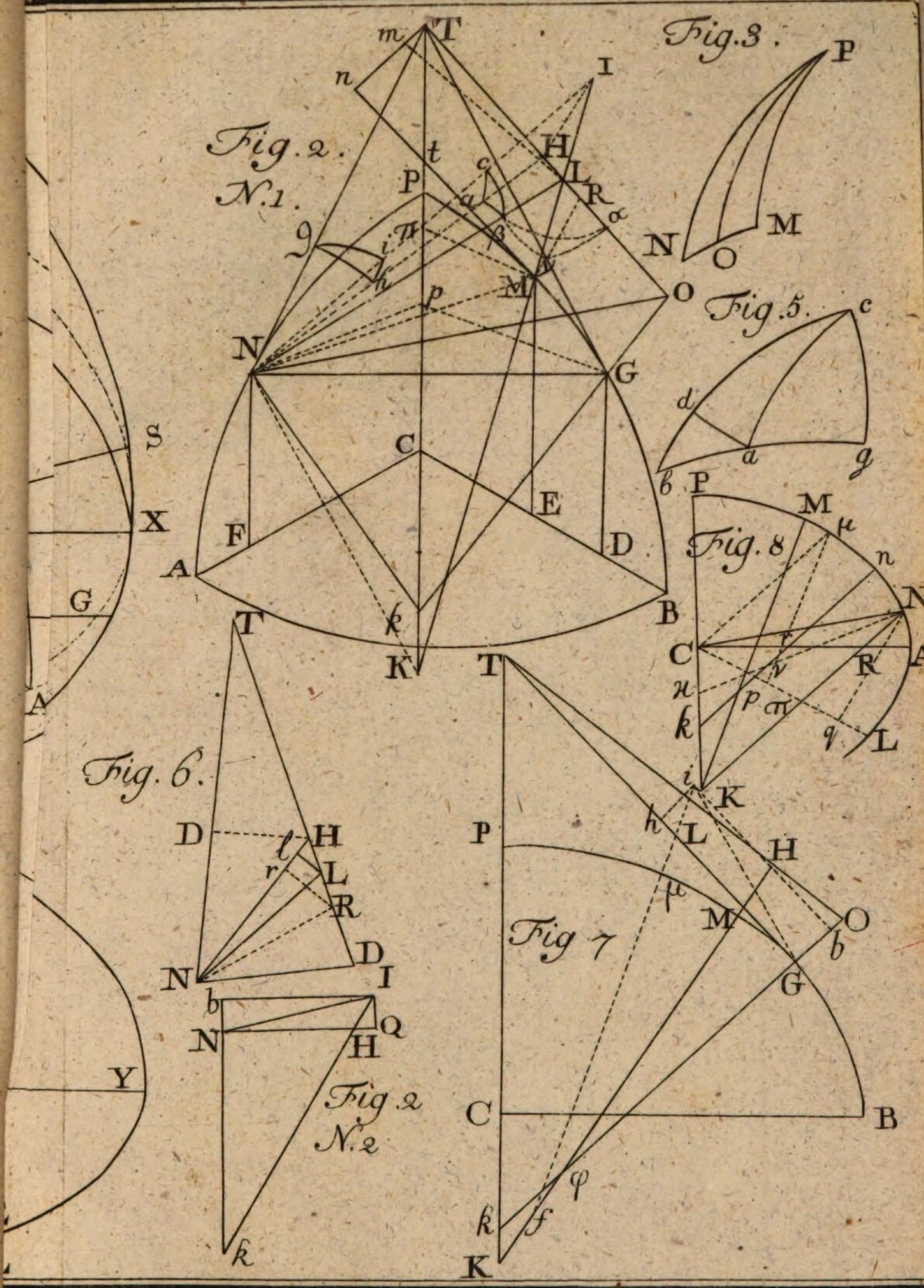
Fig. 2.
N. 1.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 8
Fig. 6.
Fig 7
Fig. 2
N. 2

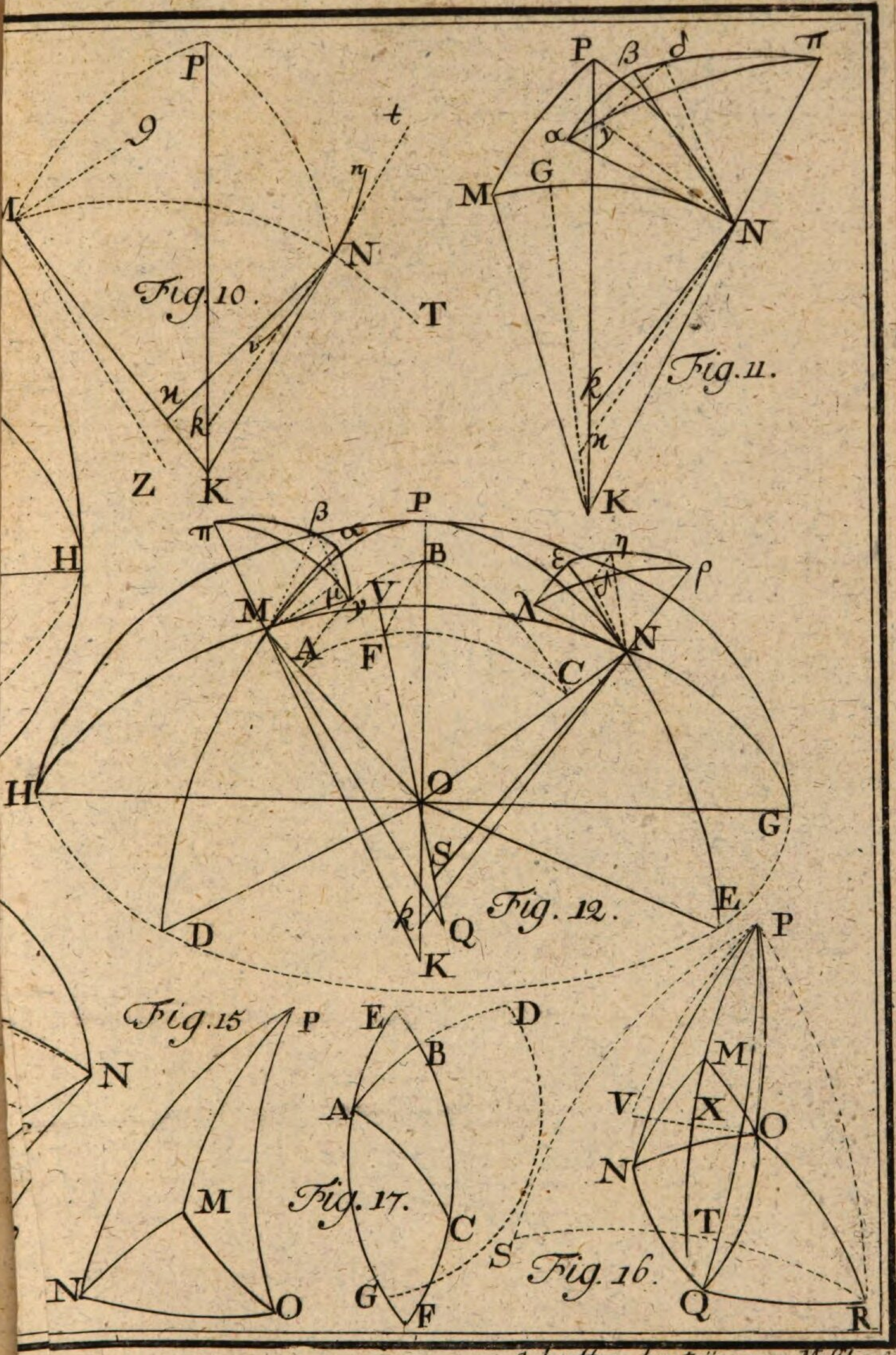
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 15
Fig. 16.
Fig. 17.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Scherffer, Karl,

Beyträge zur Meßkunst auf der Oberfläche der Erde, wenn man sie als eine Elliptoide betrachtet, deren Verhältniß der Achsen 230 : 231 samt einem Anhange über die Quadratur der Oberfläche einer Elliptoide auf Logarithmen und Sinus reduciert

Wien 1783

Math.p. 495
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082728-7
VD18 1394729